

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

E. CHWALLA-GRAZ • K. FEDERHOFER-GRAZ • P. FUNK-WIEN
W. GAUSTER-RALEIGH, USA. • G. HEINRICH-WIEN • A. KROMM-GRAZ
E. MELAN-WIEN • H. MELAN-WIEN • H. PARKUS-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

H. PARKUS-WIEN

BAND XIV, HEFT 1

MIT 41 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN 4. APRIL 1960)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1960

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbaslei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbaslei 5
Tel. 63 96 14, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in mindestens einer dieser drei Sprachen vorangestellt werden, die vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzellen, mitzuliefern ist.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10 % der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind: der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

Band XIV, Heft 1

Inhaltsverzeichnis

Seite

Originalarbeiten

G. Jauch, Meridiankonstruktion rotierender Werkzeuge zur Herstellung von Schraubenflächen. (Mit 23 Textabbildungen)	1
F. Ollendorff, Der Windungskurzschlußstrom großer Synchronmaschinen. (Mit 18 Textabbildungen)	23
O. Fritscher, Berechnung der komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen als Ergänzung der Methode von Graeffe	68
Buchbesprechungen	75
Girkmann, K., Flächentragwerke, 5. Aufl. (H. Parkus). — Roth, A., Hochspannungstechnik, 4. Aufl. (L. Kneissler).	

1127 K

Meridiankonstruktion rotierender Werkzeuge zur Herstellung von Schraubenflächen*

Von

G. Jauch, Stuttgart

Mit 23 Textabbildungen

Zusammenfassung. Für die in der Technik vorkommende Aufgabe, eine bestimmte Schraubenfläche aus einem Werkstück — unter Umständen mit sehr hoher Genauigkeit — herauszuarbeiten, haben besondere Bedeutung die Bearbeitungsverfahren erlangt, die sich rotierender Werkzeuge bedienen (z. B. Fräsen und Schleifen). Die Konstruktion des dazu erforderlichen Werkzeuges ist in erster Linie ein geometrisches Problem. Zur Lösung sind im wesentlichen zwei Methoden — Normalen- und Parallelkreisverfahren — bekannt, die geometrisch und analytisch ausgewertet werden können. Die Rechnung führt — von einfachen Spezialfällen abgesehen — auf eine transcendente Gleichung, die für jeden Eingriffspunkt zu lösen ist. Da die Rechnung, die ziemlichen Aufwand erfordert, erst nach einer vorausgegangenen geometrischen Behandlung erfolgreich einsetzen kann, ist es wünschenswert, ein möglichst einfaches zeichnerisches Verfahren zu besitzen, das bei hoher Genauigkeit nur wenig Zeichenarbeit erfordert.

Es wurde ein neuer Weg zur zeichnerischen Lösung gefunden, der sich auf einfache kinematische Tatsachen stützt, mit denen sich das Problem in kotierter Projektion behandeln läßt. Auf diesem Wege gelang es, sowohl das Normalen- als auch das Parallelkreisverfahren wesentlich zu vereinfachen und abzukürzen.

Es konnte ferner eine einfache hinreichende Bedingung für die Lage der Werkzeugachse (Drehflächenachse) angegeben werden, welche die Existenz von solchen Drehflächen sichert, durch die jeweils die gesamte Schraubenfläche erzeugt werden kann.

Die Durchführung der neuen zeichnerischen Verfahren wurde an einem Beispiel erläutert.

I. Einleitung

Die in der Technik vorkommende Aufgabe, eine bestimmte Schraubenfläche aus einem Werkstück — unter Umständen mit sehr hoher Genauigkeit — herauszuarbeiten, stellt ein wichtiges Problem der spangebenden Fertigung dar (vgl. Abb. 1 und 2). Besondere Bedeutung haben dabei die Bearbeitungsverfahren erlangt, die sich rotierender Werkzeuge bedienen (z. B. Fräsen und Schleifen). Ist eine Schraubenfläche von vorgeschriebener Form mit Hilfe eines solchen Verfahrens aus einem Werkstück herauszuarbeiten, so ist die Konstruktion des dazu erforderlichen Werkzeuges in erster Linie ein geometrisches Problem:

Die herzustellende Schraubfläche $[\Phi]$ (Achse a , Ganghöhe h) sei durch eine auf ihr liegende Kurve (E) — Erzeugende genannt — gegeben. Gesucht ist der Meridian der von den Schneiden des rotierenden Werkzeuges überstrichenen Drehfläche $[\Psi]$ (Achse b), wobei b passend zu wählen ist.

* Die vorliegende Arbeit wurde von der Technischen Hochschule Stuttgart als Dissertation genehmigt. Sie wurde am Lehrstuhl für Darstellende Geometrie und angewandte Mathematik an der T. H. Stuttgart durchgeführt. Herrn Prof. Dr. rer. techn. O. Baier spreche ich hiefür und für seine wertvollen Ratschläge bei ihrer Fertigstellung meinen besonderen Dank aus. Ebenso danke ich meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Ehrhardt für sein freundliches Interesse an der Arbeit.

Bei der Bearbeitung stehen in jedem Augenblick Werkzeug und Werkstück im „Eingriff“, d. h. die Schraubfläche $[\Phi]$ und die Drehfläche $[\Psi]$ berühren sich längs einer Kurve (Q) , die Eingriffslinie genannt wird. Die Drehfläche $[\Psi]$ entsteht durch

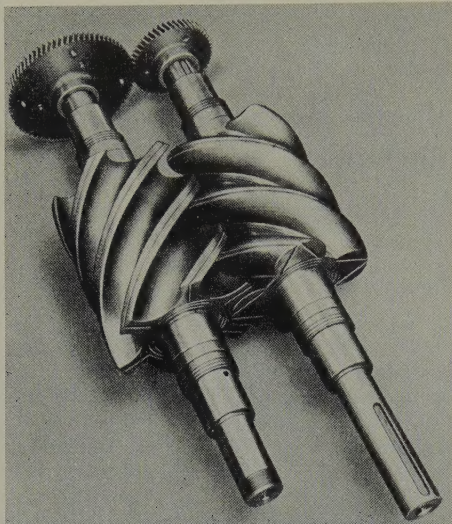


Abb. 1. Läuferpaar eines Schraubenverdichters. (Mit freundlicher Genehmigung der Gutehoffnungshütte Sterkrade AG.)

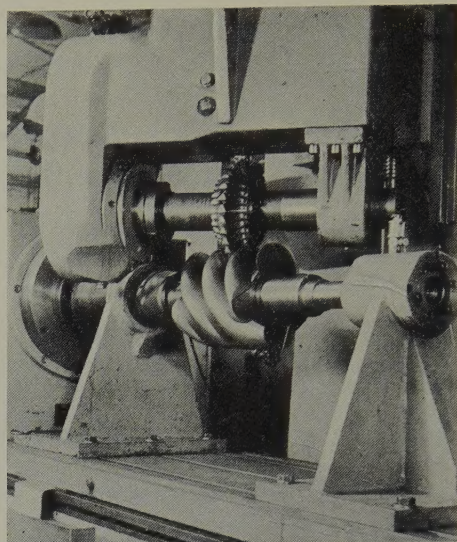


Abb. 2. Bearbeitung des Hauptdrehkolbens eines Schraubendrehkolbenverdichters. (Mit freundlicher Genehmigung der Aerzener Maschinenfabrik GmbH.)

Rotation der Eingriffslinie (Q) um die Achse b der Drehfläche. Zur Konstruktion von (Q) bzw. $[\Psi]$ sind im wesentlichen zwei Methoden bekannt¹⁻⁷, die den Meridian der Drehfläche $[\Psi]$ punkt- und tangentialweise liefern:

1. Normalenverfahren

Da die Flächen $[\Phi]$ und $[\Psi]$ in jedem Punkt ihrer Berührlinie (Q) eine gemeinsame Normale haben, ist ein Eingriffspunkt Q dadurch gekennzeichnet, daß die zugehörige Schraubflächennormale n die Drehflächenachse b trifft.

2. Parallelkreisverfahren

Jeder Schnitt δ normal zur Drehflächenachse b schneidet die Drehfläche $[\Psi]$ in einem Parallelkreis (K) und die Schraubfläche $[\Phi]$ in einer Kurve (C) . (C) und (K)

¹ E. Stübler: Das Fräsen von Schraubengewinden. Z. Math. Phys. **57**, 271–279 (1909).

² E. Stübler: Geometrische Probleme bei der Verwendung von Schraubenflächen in der Technik. Z. Math. Phys. **60**, 244–274 (1912).

³ Th. Schmid: Darstellende Geometrie, II. Bd., S. 281 ff. (Sammlung Schubert 66, Berlin und Leipzig 1921).

⁴ O. Baier: Konstruktion eines Fräasers, der eine gegebene Schraubenfläche erzeugt. Z. angew. Math. Mech. **14**, 248–250 (1934).

⁵ J. Heisig: Die Profilermittlung des Formfräasers für das Fräsen von Spiralnuten. Diss. T. H. Wien 1951.

⁶ W. Wunderlich: Geometrische Grundlagen für das Fräsen von Schraubnuten I. Österr. Ing.-Arch. **6**, 315–326 (1952).

⁷ F. Hohenberg: Konstruktive Geometrie für Techniker, S. 173 ff. Wien: Springer-Verlag. 1956.

müssen sich in einem Punkt Q der Eingriffslinie (Q) berühren (ist diese Bedingung nicht erfüllbar, so existiert in der Ebene δ kein Eingriffspunkt Q).

Bei den Normalenverfahren — das sind solche, die die unter I, 1 genannte Eigenschaft zur Konstruktion benützen — wird zunächst zu einem bestimmten Punkt P der auf $[\Phi]$ liegenden Erzeugenden (E) derjenige Eingriffspunkt Q bestimmt (falls ein solcher existiert), der diesen Punkt P (im Sinne von I, 1) aus dem Werkstück herausarbeitet. Ist die Eingriffslinie (Q) durch eine genügende Anzahl solcher Punkte Q und ihrer Tangenten ermittelt, so erhält man durch Rotation der Eingriffslinie (Q) um die Achse b — wie oben dargelegt wurde — die Drehfläche $[\Psi]$ und damit auch ihren Meridian. Jedem Punkt P der Erzeugenden (E) ist somit ein ganz bestimmter Punkt des Meridians zugeordnet, und man hat die Gewähr, daß das Werkzeug die gewünschte Schraubfläche $[\Phi]$ mathematisch (d. h. im Sinne von I, 1) herausarbeitet; praktisch kann jedoch unter Umständen sogenannter Unterschnitt auftreten (d. h. aus $[\Phi]$ wird stellenweise zuviel herausgearbeitet). Es ist ein Nachteil der Normalenverfahren, daß etwaige Unterschnitte nicht unmittelbar erkennbar sind. (Unterschnitt infolge Selbstüberschneidung des Meridians ist allerdings unmittelbar ersichtlich.)

Bei dem Parallelkreisverfahren wird in einem zur Drehflächenachse b normalen Schnitt δ der Abstand ϱ des Eingriffspunktes Q von der Achse b direkt als Radius des Parallelkreises (K) gefunden. Trotzdem ist die Konstruktion viel zeitraubender als das Normalenverfahren von O. Baier (vgl. Abschnitt II). Um zu sehen, ob beim Parallelkreisverfahren wirklich die ganze Schraubfläche $[\Phi]$ aus dem Werkstück herausgearbeitet wird, ist es unter Umständen erforderlich, mit Hilfe der Eingriffslinie (Q) zu kontrollieren, ob von der Gesamtheit der Berührungspunkte Q auf (Q) beim Verschrauben auch die ganze Länge der — auf $[\Phi]$ liegenden — Erzeugenden (E) überstrichen wird. Jedoch ist es ein offensichtlicher Vorteil, daß man unmittelbar sieht, ob ein Parallelkreis von $[\Psi]$ zu Unterschnitt führt oder nicht. Kein Unterschnitt entsteht, wenn (C) und (K) sich berühren und keine Punkte von (C) innerhalb (K) liegen; Unterschnitt tritt auf, wenn es Punkte von (C) gibt, die innerhalb (K) liegen.

Die oben skizzierten Verfahren können zeichnerisch und rechnerisch ausgewertet werden. Die Rechnung führt — von einfachen Spezialfällen abgesehen — auf eine transzendente Gleichung, die für jeden Eingriffspunkt zu lösen ist*. Zur genauen Ermittlung des Drehflächenmeridians empfiehlt es sich, die zeichnerisch gefundenen Werte mit Hilfe eines auf die transzendente Gleichung angewandten Iterationsverfahrens auf die technisch geforderte Genauigkeit zu verbessern. Da auch die Rechnung erst nach einer vorausgegangenen geometrischen Behandlung erfolgreich einsetzen kann, ist es wünschenswert, ein möglichst einfaches zeichnerisches Verfahren zu besitzen, das nur wenig Zeichenarbeit erfordert.

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Weg zur zeichnerischen Lösung der eingangs geschilderten Problemstellung dargelegt. Er gründet sich auf einfache kinematische Tatsachen, mit denen sich das Problem leicht in kotierter Projektion behandeln läßt. Auf diesem Wege gelingt es in einfacher Weise, sowohl das Normalen- als auch das Parallelkreisverfahren in der Durchführung wesentlich abzukürzen. Als Grundlage für die später zu entwickelnden Konstruktionen seien die dazu benützten kinematischen Tatsachen im Abschnitt III in der später zu verwendenden Form vorausgeschickt. Im Abschnitt IV bzw. V erfolgt dann die kinematische Behandlung des Normalen- bzw. Parallelkreisverfahrens. Der Abschnitt VI ist der Wahl der Achse b gewidmet. Im Abschnitt VII werden die neuen zeichnerischen Verfahren an einem Beispiel erläutert.

* S. Fußnoten 2, 5 und 6, S. 2.

II. Bekannte Normalenverfahren

1. Vorbemerkungen

Die auf der Schraubfläche $[\Phi]$ liegende Erzeugende (E) habe im Punkt P die Schraubflächennormale n . Wird die Normale n längs der Bahnschraubenlinie des Punktes P verschraubt, so gelangt sie auch in eine Lage $\bar{n}$, in der sie die Drehflächenachse b in einem Punkte T trifft⁸. In dieser Lage ist der Normalenfußpunkt auf $[\Phi]$ der zu P gehörende Eingriffspunkt Q . Dem Punkt P ist auf der Drehfläche $[\Psi]$ ein Kreis (K) zugeordnet, der durch Rotation von Q um die Achse b entsteht. Die aus ihrer Ausgangslage um den Schraubwinkel $\bar{\psi}$ in die Lage $\bar{n}$ verschraubte Schraubflächennormale werde mit $\bar{n}$ bezeichnet. $\bar{n}$ und b spannen eine Ebene ε auf, in der Q den auf $[\Psi]$ gesuchten Punkt des Meridians darstellt und die verschraubte Normale $\bar{n}$ Meridiannormale ist (vgl. Abb. 3).

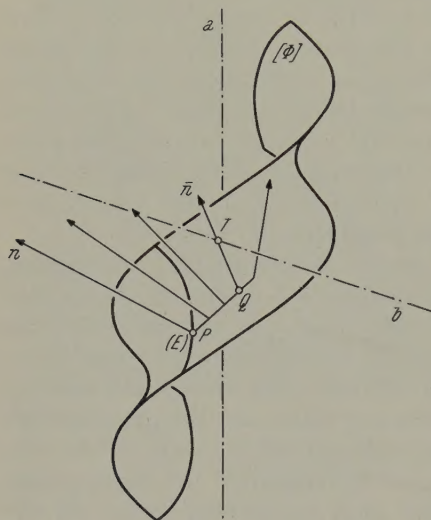


Abb. 3

Wie man sieht, besteht demnach die Hauptaufgabe im Aufsuchen der Lage $\bar{n}$ bzw. in der Ermittlung des zu ihr gehörenden Schraubwinkels $\bar{\psi}$. Man kann auch umgekehrt n festhalten und die Achse b in eine Lage $\bar{b}$ verschrauben, in der sie die Schraubflächennormale n in einem Punkt $\bar{T}$ trifft. Wird b dabei um den Schraubwinkel $\bar{\varphi}$ verschraubt, so besteht der Zusammenhang $\bar{\varphi} = -\psi$.

2. Das Normalenverfahren von O. Baier^{9,10}

Bei diesem Verfahren bleibt die Schraubflächennormale n fest, und die Achse b wird so weit verschraubt, bis sie n trifft. O. Baier geht dabei so vor, daß er die von b bei der Schraubung überstrichene Regelschraubfläche $[\Theta]$ mit n zum Schnitt bringt und dadurch den Treffpunkt $\bar{T}$ findet. Will man für verschiedene Punkte der Erzeugenden (E) die Eingriffspunkte ermitteln, so sind demnach die verschiedenen Schraubflächennormalen stets mit derselben Fläche $[\Theta]$ zu schneiden. Dazu wird die kotierte Projektion herangezogen, wobei die Schraubachse a senkrecht zur Grundrißtafel angenommen wird. — In der kotierten Projektion ist ein Punkt P durch seinen Grundriß P' und die Angabe seiner Höhe z_v (als Kote v) über der Grundrißebene bestimmt.

Die Höhenlinien der Regelschraubfläche $[\Theta]$ kann man in einfacher Weise durch Verschrauben ihres Querschnittes erhalten. O. Baier zeichnet diese Querschnittskurve — eine Kreisevolvente — auf Klarpapier und erhält die einzelnen Höhenlinien von $[\Theta]$ durch Drehung dieses Klarpapiers (System S_2) um den Punkt a' der festen Grundrißtafel (System S_1). Zunächst liege die Querschnittskurve als Höhenlinie 0 in der Grundrißebene. In dieser Ausgangslage wird auf S_2 um a' eine gleichmäßig unterteilte Kreisskala angebracht, deren Marke 0 sich mit einer in S_1 festen Ablesemarke deckt. Bei der Bezifferung wird — von der Marke 0 im mathematisch positiven Sinn

⁸ Im Abschnitt VI wird gezeigt, wie man die Drehflächenachse b wählen kann, damit stets eine solche Lage $\bar{n}$ existiert. Gibt es zu einem bestimmten Punkt P mehrere Lagen $\bar{n}$, so wählt man zweckmäßig diejenige, die der Ausgangslage am nächsten ist.

⁹ S. Fußnote 4, S. 2.

¹⁰ S. Fußnote 6, S. 2.

ausgehend — an der Stelle $\varphi = -\frac{z_v^{11}}{p}$ die Marke v angeschrieben. Dadurch erreicht man folgendes: Wird das System S_2 so weit um a' gedreht, bis die Marke v über der in S_1 festen Ablesemarke erscheint, so stellt die in S_2 gezeichnete Querschnittskurve in der kotierten Projektion die in der Höhe z_v (Kote v) liegende Höhenlinie v von $[\Theta]$ dar. — Ist die (in S_1 gezeichnete) Grundrißprojektion n' der Schraubflächennormalen n graduert (d. h. ist auf n' die Skala der Koten angebracht), so ist das Klarpapier so weit zu drehen, bis die auf ihm gezeichnete Querschnittskurve auf n' dieselbe Marke (Kote) anzeigt wie die in S_1 feste Ablesemarke auf der Kreisskala. Wird z. B. auf beiden Skalen gleichzeitig die Marke μ angezeigt, so heißt das, die Querschnittskurve stellt in diesem Augenblick eine Höhenlinie μ von $[\Theta]$ dar und schneidet n in der Höhe μ . Dieser Schnittpunkt existiert damit nicht nur in der kotierten Projektion, sondern auch im Raum. Er ist der gesuchte Schnittpunkt von n mit $[\Theta]$, also der Punkt $\bar{T}$, in dem die verschraubte Drehflächenachse $\bar{b}$ die Schraubflächennormale n trifft. Jetzt verschraubt man die Achse $\bar{b}$ in ihre Ausgangslage zurück und nimmt dabei die mit ihr im Punkt $\bar{T}$ fest verbunden zu denkende Normale n mit. Den auf der Drehfläche $[\Psi]$ gesuchten Eingriffspunkt Q erhält man als den auf der Schraubfläche $[\Phi]$ liegenden Fußpunkt der so mit der Drehflächenachse verschraubten Normalen. Die Normale selbst stellt in dieser Lage für den durch Q gehenden Meridian von $[\Psi]$ die Meridiannormale dar.

3. Das Normalenverfahren von W. Wunderlich¹²

Bei diesem Verfahren bleibt die Drehflächenachse b — die parallel zur Aufrißebene angenommen wird — fest, und die Schraubflächennormale n wird in eine Lage $\bar{n}$ verschraubt, in der sie b trifft. Die Schraubachse a stehe wieder senkrecht auf der Grundrißebene. Der Treffpunkt T von $\bar{n}$ mit b wird als Durchstoßpunkt der Achse b mit der durch Verschraubung von n erzeugten Regelschraubfläche $[\Sigma]$ gefunden. W. Wunderlich zeichnet dazu in der durch b gelegten zweitprojizierenden Hilfsebene σ die Schnittkurve (S) von $[\Sigma]$ mit σ . Der Schnitt dieser Kurve (S) mit der ebenfalls in σ liegenden Achse b ergibt den Treffpunkt T , in dem die verschraubte Normale $\bar{n}$ die Drehflächenachse b trifft. Der auf $[\Phi]$ liegende Fußpunkt der Normalen $\bar{n}$ ist der gesuchte Eingriffspunkt Q .

4. Bemerkungen

Das Verfahren von O. Baier hat den großen Vorteil, daß man mit einer einzigen auf Klarpapier gezeichneten Kurve beliebig viele Meridianpunkte von $[\Psi]$ konstruieren kann. Bei einer etwaigen Verlegung der Achse b muß allerdings eine ganz neue Querschnittskurve gezeichnet werden, da sich mit der Achse b auch die von ihr erzeugte Regelschraubfläche ändert (eine Verlegung der Achse b auf der von ihr bei der Verschraubung erzeugten Fläche $[\Theta]$ führt zu keinem neuen Ergebnis und stehe daher nicht zur Diskussion). Verlegt man die Achse b aber so, daß sie nur in Richtung der Schraubachse a parallel zu sich selbst verschoben wird, so kann man die auf das Klarpapier (System S_2) gezeichnete Querschnittskurve beibehalten, wenn man die im System S_1 liegende Ablesemarke entsprechend verlegt.

Das Verfahren von W. Wunderlich hat den Vorteil, daß bei Verlegung der Achse b — sofern sie nur in der Hilfsebene σ erfolgt — die Kurven (S) nicht neu zu zeichnen sind, dagegen ist zur Konstruktion jedes einzelnen Meridianpunktes von $[\Psi]$ eine andere Kurve (S) erforderlich.

¹¹ $p = \frac{h}{2\pi}$ ist der Schraubparameter (reduzierte Ganghöhe). Bei einer Rechtsschraube sind p und $h > 0$, bei einer Linksschraube sind p und $h < 0$.

¹² S. Fußnote 6, S. 2.

Bei beiden Verfahren braucht man den Treffpunkt T bzw. $\bar{T}$ unmittelbar zur Konstruktion. Ist er auf der Zeichnung unzugänglich — was leicht vorkommen kann —, so erfordern diese Verfahren erheblichen Mehraufwand. Im Abschnitt IV wird ein Verfahren angegeben, bei dem dieser Nachteil nicht auftritt.

III. Kinematische Vorbetrachtung

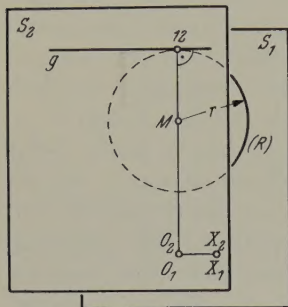


Abb. 4

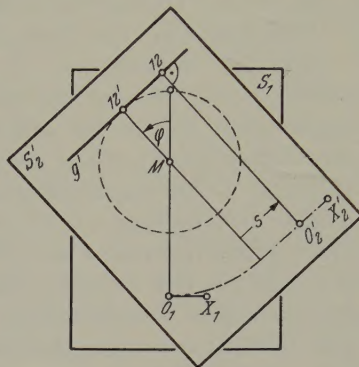


Abb. 5

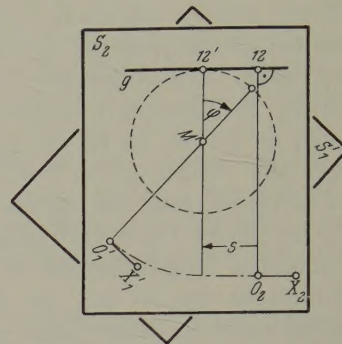


Abb. 6

1. Die Kreisevolventenbewegung

Wird das ebene System S_2 gegen das ebene System S_1 in der Ebene von S_1 so bewegt, daß die Gerade g von S_2 auf dem Kreis (R) von S_1 ohne zu gleiten abrollt, so beschreibt jeder Punkt des Systems S_2 gegenüber dem System S_1 eine Kreisevolvente, und zwar eine gespitzte, wenn er auf g liegt, eine geschlungene, wenn er bezüglich g auf der gleichen Seite wie (R) liegt, und eine gestreckte, wenn er auf der (R) gegenüberliegenden Seite von g liegt. Bekanntlich ist g die Gangpolbahn und (R) die Rastpolbahn. Der jeweilige Berührungspunkt von Gang- und Rastpolbahn — in Abb. 4 mit 12 bezeichnet — wird momentaner Drehpol oder kurz Momentanpol genannt.

Mit S_2 und S_2' seien zwei verschiedene Lagen des bewegten Systems bezeichnet (vgl. Abb. 5). Der Momentanpol in der neuen Lage S_2' sei 12'. Die Lage S_2' hätte auch auf folgendem Weg erreicht werden können:

Schritt 1: Drehung von S_2 um den Winkel φ , Drehpunkt M ,

Schritt 2: Vorschub $s = r\varphi$ von S_2 längs g' (der vom jeweiligen Momentanpol auf der Gangpolbahn durchlaufene Weg ist betragsgleich dem auf der Rastpolbahn durchlaufenen Weg $r\varphi$).

Drehwinkel φ (Schritt 1) und Vorschub s (Schritt 2) sind dabei einander proportional. In Abb. 5 ist die Bahn des Punktes O_2 für die beiden Schritte strichpunktuiert eingezeichnet. Beim Abrollen bewegt sich aber der Punkt O_2 auf einer anderen Bahn — nämlich einer Kreisevolvente — in die Lage O_2' , weil beide Schritte gleichzeitig und nicht nacheinander ablaufen.

2. Die Zykloidenbewegung

Sie ergibt sich als Umkehrbewegung [die Gangpolbahn g wird zur Rastpolbahn, und die Rastpolbahn (R) wird zur Gangpolbahn] der Kreisevolventenbewegung, d. h. jeder Punkt des Systems S_1 beschreibt gegenüber dem System S_2 eine (gemeine) Zykloide, und zwar eine gespitzte, wenn er auf (R) liegt, eine geschlungene, wenn er außerhalb (R) liegt, und eine gestreckte, wenn er innerhalb (R) liegt.

Die neue Lage S_1' (vgl. Abb. 6) hätte wiederum durch zwei Schritte erreicht werden können:

Schritt 1: Vorschub $s = r\varphi$ von S_1 längs g ,

Schritt 2: Drehung von S_1 um den Winkel φ , Drehpunkt M' .

Im folgenden kommt es nur auf die relative Bewegung der Systeme S_1 und S_2 an. Es ist daher gleichgültig, von welchem der beiden Systeme aus die Bewegung betrachtet wird. Man kann das eine oder andere System als Bezugssystem wählen, und die Bewegung wird der getroffenen Wahl entsprechend eine Kreisevolventen- oder eine Zykloidenbewegung sein.

IV. Kinematische Behandlung des Normalenverfahrens

Zunächst sei angenommen, die Achse b sei in die Lage $\bar{b}$ verschraubt, in der sie die im Punkte P von (E) gegebene Schraubflächennormale n im Punkte $\bar{T}$ trifft (vgl. Abb. 7; die Schraubachse a liege normal zur Grundrißebene, die Ausgangslage der Achse b parallel zur Aufrißebene).

Schneiden sich n und $\bar{b}$ in einem Punkt $\bar{T}$, so müssen in der kotierten Projektion n' und $\bar{b}'$ im Punkt $\bar{T}'$ gleiche Koten haben. Folglich kann man, um die Lage $\bar{b}$ zu finden, b so weit verschrauben, bis im kotierten Grundriß gleiche Koten von n' und b' zur Deckung kommen. Dazu braucht man den graduierten Grundriß n' von n und den jeweiligen graduierten Grundriß b' verschiedener Schraublagen von b . Die Graduierung von n' und der Ausgangslage b' der Achse b bietet keine Schwierigkeiten. Beim Verschrauben der Achse b ändert jedoch jeder ihrer Punkte seine Höhe. Jede Schraublage von b erfordert also eine neue Graduierung. Der Neigungswinkel der Achse b gegen die Grundrißebene bleibt bei der Schraubung konstant und somit auch ihr Intervall (Abstand zweier aufeinanderfolgender ganzzahliger Koten im Grundriß). Daher unterscheidet sich die Graduierung von b' in verschiedenen Schraublagen von b nur durch eine längs b' verschobene Lage der von den Koten auf b' gebildeten Skala. Die Schraubung von b läßt sich demnach in der kotierten Projektion darstellen, und zwar durch ein System S_2 , das b' enthält und sich um den Punkt a' des ruhenden Systems S_1 dreht, und durch ein System S_3 , das eine lineare Skala enthält, deren Graduierung sich in der Ausgangslage ($\varphi = 0$) mit der Graduierung von b' deckt und längs b' gegen das System S_2 einen Vorschub $s = s(\varphi)$ ausführt (vgl. Abb. 8). Die Funktion $s = s(\varphi)$ (Zwanglaufbedingung der drei Systeme) muß so beschaffen sein, daß die Skala von S_3 für jeden Schraubwinkel φ die Graduierung der Achse b' ergibt. Bei der Schraubung der Achse b um den Winkel φ ändert jeder ihrer Punkte seine Höhe um $\Delta z = p\varphi$. Zwei auf b liegende Punkte O und X haben diese Höhendifferenz (vgl. Abb. 9). Da nach der Schraubung um den Winkel φ der Punkt O diejenige Kote besitzt, die vorher dem Punkt X eigen war, entspricht

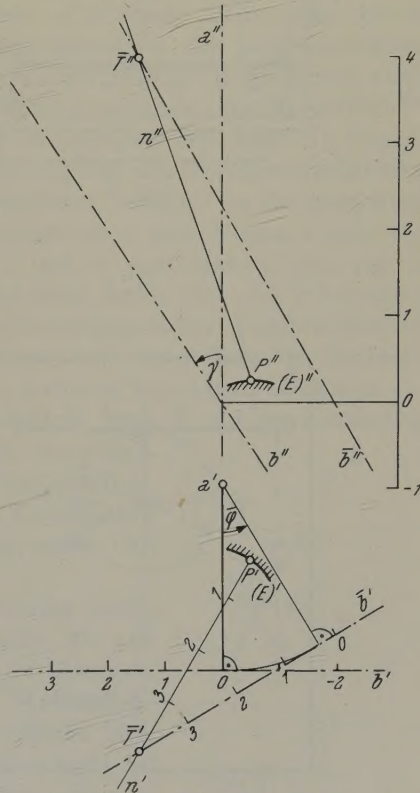


Abb. 7

$X' O'$ dem Längsvorschub von S_3 gegen S_2 und man entnimmt der Abb. 9 $s = \Delta z \cdot \operatorname{tg} \gamma = p \varphi \cdot \operatorname{tg} \gamma$ (für $\gamma \neq 90^\circ$).

Die Bewegung von S_3 läßt sich auch auf einfache Weise mit nur zwei Systemen S_1 und S_2 erzeugen. Da $\frac{s}{\varphi} = p \cdot \operatorname{tg} \gamma = \text{const.}$ ist, braucht man nur bei der im Abschnitt III beschriebenen Kreisevolventenbewegung den Rastpolbahnradius $r = |p \cdot \operatorname{tg} \gamma|$ zu

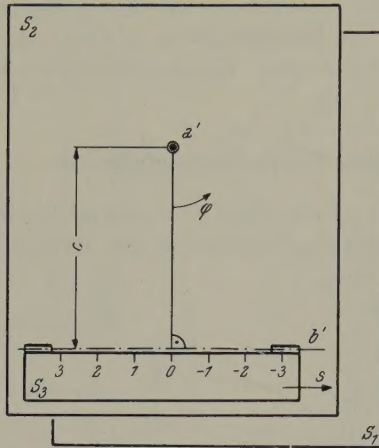


Abb. 8

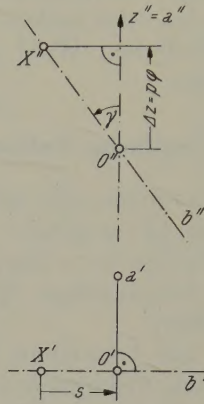


Abb. 9

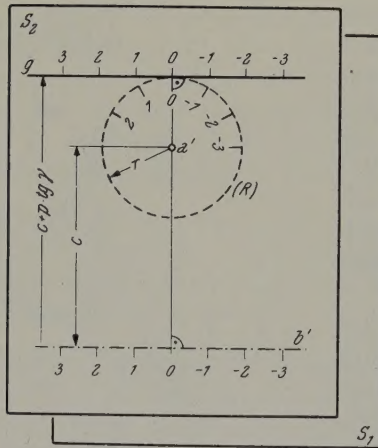


Abb. 10

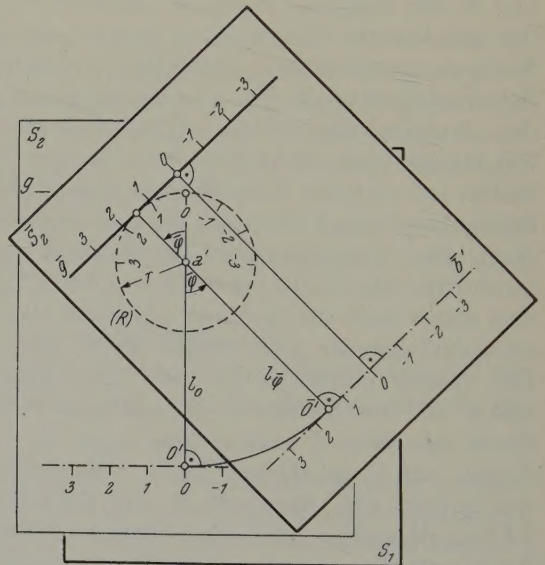


Abb. 11

wählen, und das System S_2 führt gegen das ruhende System S_1 die gleiche Bewegung aus wie vorher S_3 und kann somit in der kotierten Projektion die Schraubung von b darstellen (vgl. Abb. 10).

Für die praktische Durchführung zeichnet man das ganze System S_2 , bestehend aus der graduierten Achse b' und der Gangpolbahn g (vgl. Abb. 11), auf ein Klarpapier und bewegt es über dem auf gewöhnliches Zeichenpapier gezeichneten System S_1 , das die graduierte Schraubflächennormale n' und die Rastpolbahn (R) (Kreis um a'

mit Radius $r = |p \cdot \operatorname{tg} \gamma|$ enthält. Damit bei der Bewegung g auf (R) gleitungsfrei abrollt, kann man auf den beiden Polkurven g und (R) längentreue Skalen abtragen und während der Bewegung deren gleichbezahlte Teilstriche der Reihe nach zur Deckung bringen, und zwar so, daß bei sich deckenden Skalenmarken v die durch den Skalenpunkt v gezeichnete Normale von g durch a' geht. Es ist zweckmäßig, im System S_2 in den einzelnen Skalenpunkten die Normalen von g zu zeichnen, um mit ihrer Hilfe die zu diesen Skalenpunkten gehörenden Lagen von S_2 bequem und genau einstellen zu können. Sobald bei dieser Bewegung gleichbezahlte Punkte von n' und b' zur Deckung kommen, ist die gesuchte Lage $\bar{b}'$ gefunden. Der zur Lage $\bar{b}$ gehörige Schraubwinkel $\bar{\varphi}$ ist gleich dem Winkel, um den b' und damit das System S_2 gegen die Ausgangslage verdreht wurde. $\bar{\varphi}$ ergibt sich als Zentriwinkel des vom Momentanpol 12 auf (R) durchlaufenen Bogens. Er kann auch bestimmt werden als Winkel der beiden Lote l_0 und $l_{\bar{\varphi}}$, die von a' auf die Ausgangslage von b' und die Lage $\bar{b}'$ gefällt werden (vgl. Abb. 11).

Der zur Lage $\bar{b}'$ gehörende Momentanpol 12 wird im allgemeinen nicht genau auf einem bezahlten Punkt der Skala liegen. Um die gesuchte Lage b' jedoch trotzdem ohne großen Aufwand hinreichend genau einstellen zu können, kann man davon Gebrauch machen, daß für genügend kleine Lagenänderungen die vorgeschriebene Bewegung durch eine reine Drehung um den momentanen Drehpol angenähert wird.

Im Abschnitt II, 4 wurde schon erwähnt, daß unter Umständen der Grundriß $\bar{T}'$ des Schnittpunktes $\bar{T}$ von n und b auf der Zeichnung unzugänglich sein kann. In diesem Fall ist es von Vorteil, daß bei der kinematischen Behandlung des Normalenverfahrens in jedem Augenblick der Schraubung die Achse b' graduert vorliegt. In der gesuchten Lage spannen die Achse $\bar{b}$ und die Schraubflächennormale n eine Ebene $\bar{\varepsilon}$ auf. Die Verbindungsgeraden gleichbezahlter Punkte von $\bar{b}'$ und n' sind Höhenlinien von $\bar{\varepsilon}$. Da die Höhenlinien einer Ebene zueinander parallel sind, heißt das, das Klarpapier (System S_2) ist so weit zu bewegen, bis die Verbindungsgeraden gleichbezahlter Punkte von b' und n' parallel sind und somit Höhenlinien von $\bar{\varepsilon}$ darstellen. Der Einfachheit halber wird man dazu das Kotenpaar 0 und ein weiteres Kotenpaar benutzen. — Offensichtlich kann diese Methode auch angewandt werden, wenn $\bar{T}'$ auf der Zeichnung zugänglich ist. Da man nur zwei Kotenpaare braucht, kann man sich die vollständige Graduierung sparen. Um festzustellen, wann die Verbindungsgeraden der durch die beiden Kotenpaare markierten Punkte parallel sind, ist lediglich etwas mehr Geschick erforderlich.

Im Gegensatz zur rein mathematischen Betrachtung kommen für die praktische Herstellung der Schraubfläche $[\Phi]$ nur solche Schnittpunkte $\bar{T}$ in Frage, die auf dem Teil der Schraubflächennormalen n liegen, der aus der bearbeiteten Werkstückoberfläche herausweist. Bestimmt man $\bar{T}'$ direkt (indem man gleichbezahlte Punkte von b' und n' zur Deckung bringt), so wird $\bar{T}'$ stets auf dem richtigen Normalenstück liegen, da von vornherein nur dieses Stück der Normalen gezeichnet und graduert wird. Arbeitet man aber mit den zwei Kotenpaaren (insbesondere wenn $\bar{T}'$ unzugänglich ist), so ist es nötig, sich zu vergewissern, ob $\bar{T}'$ auf dem richtigen Teil der Normalen liegt.

Da der Punkt P der Erzeugenden (E) für die Lage $\bar{b}$ der Drehflächenachse Eingriffspunkt ist, entsteht der gesuchte Parallelkreis (K) von $[\Psi]$ durch Rotation von P um die Achse $\bar{b}$. Von dem Parallelkreis (K) ist noch der Radius zu bestimmen sowie der Abstand m seines Mittelpunktes M von dem auf b festen Punkt O , der der Schraubachse a am nächsten liegt (vgl. Abb. 12).

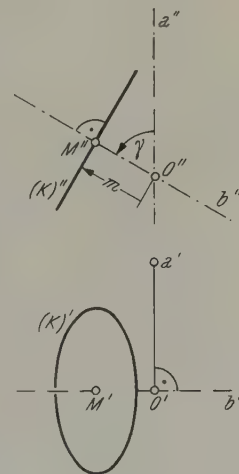


Abb. 12

Die in die Lage $\bar{b}$ verschraubten Punkte O und M seien mit $\bar{O}$ und $\bar{M}$ bezeichnet. Im Grundriß erscheint O' in allen Schraublagen als Lotfußpunkt des von a' auf b' gefälltten Lotes (vgl. Abb. 11). Der Radius $PM = \varrho$ und die Strecke $OM = m$ liegen in der von $\bar{b}$ und n aufgespannten Ebene $\bar{\varepsilon}$. Man kann daher zur Bestimmung von m und ϱ die Ebene ε zur Grundrißebene parallel drehen. Als Drehachse empfiehlt sich dazu die durch P gehende Höhenlinie von ε . — Parallelgedrehte Elemente sind im folgenden stets mit einer hochgestellten Null gekennzeichnet. — Der Lotfußpunkt des von $P' = P^0$ auf die parallelgedrehte Achse b^0 gefälltten Lotes ist der parallelgedrehte Mittelpunkt $\bar{M}^0$ von (K) . ϱ und m kann man jetzt bequem ermitteln, da $\varrho = P^0 M^0$ und $m = \bar{O}^0 \bar{M}^0$ ist.

Für den in der Ebene $\bar{\varepsilon}$ liegenden Meridian der Drehfläche $[\Psi]$ ist der Punkt P (der bezüglich $\bar{b}$ Eingriffspunkt ist) ein Meridianpunkt, und die Schraubflächennormale n (des Punktes P) ist seine Meridiannormale. Die parallelgedrehte Normale n^0 ist Meridiannormale des parallelgedrehten Meridianpunktes P^0 .

Die Konstruktion von n^0 und b^0 kann so erfolgen, daß man die durch P gehende Höhenlinie von ε als Achse für die Paralleldrehung benützt. Mit dem auf dieser Drehachse liegenden Punkt $P = P^0$ von n liegt auch ein Punkt von n^0 fest. Ebenso ist der auf dieser Drehachse liegende Punkt von $\bar{b}$ gleichzeitig ein Punkt von $\bar{b}^0$. n^0 und $\bar{b}^0$ liegen nun fest, wenn außer diesen beiden Punkten jeweils noch ein weiterer parallelgedrehter Punkt von n bzw. $\bar{b}$ konstruiert ist. Da $\bar{T}$ Schnittpunkt von n und $\bar{b}$ ist, kann man $\bar{T}$ parallelrehen und hat mit $\bar{T}^0$ einen weiteren Punkt von n^0 bzw. $\bar{b}^0$. Sind die Punkte $\bar{T}$ und $\bar{T}^0$ auf der Zeichnung unzugänglich, so kann man zur Konstruktion von n^0 bzw. $\bar{b}^0$ beliebige andere Punkte von n bzw. $\bar{b}$ parallelrehen. Insbesondere kann der Punkt O zur Ermittlung von $\bar{b}^0$ dienen, denn $\bar{O}^0$ wird auch zur Bestimmung von m gebraucht. (Zur Konstruktion von n^0 bzw. b^0 sollten aber aus Gründen der Genauigkeit keine Punkte benützt werden, die nahe an der Paralleldrehachse liegen.)

Verlegung der Drehflächenachse b

Bei einer etwaigen Verlegung von b können folgende Fälle auftreten:

a) Änderung des Abstandes c der Achse b von der Schraubachse.

Auf dem Klarpapier (System S_2) braucht man nur die verlegte Achse b' im neuen Abstand c einzuzichnen. Die Graduierung von b' bleibt — wegen $\gamma = \text{const.}$ — erhalten, ebenso der Radius $r = |p \cdot \text{tg } \gamma|$ der Rastpolbahn (R). (Der Abstand c kann auch den Wert Null annehmen.)

b) Parallelverschiebung von b um Δz in Richtung der Schraubachse a bzw. Drehung von b bezüglich a um den Winkel $\Delta \varphi = -\frac{\Delta z}{p}$.

Die auf der Rastpolbahn (R) liegende Kreisskala ist um den Winkel $\Delta \varphi$ zu drehen. — Bei dem Verfahren von O. Baier ist in diesem Fall eine entsprechende Änderung notwendig, nämlich eine Drehung der in S_1 festen Ablesemarke um den Winkel $\Delta \varphi$ (vgl. Abschnitt II, 4).

c) Änderung des Anstellwinkels γ von b gegen a .

Für den Radius der Rastpolbahn (R) ergibt sich — entsprechend der Beziehung $r = |p \cdot \text{tg } \gamma|$ — ein neuer Wert. Die Achse b' ist neu zu graduieren. Dieser Fall erfordert also die meisten Änderungen. Es ist jedoch von Vorteil, daß es sehr einfache Änderungen sind. Im System S_2 sind außer den Skalen nur Geraden zu zeichnen. Im System S_1 ist ein Kreis zu zeichnen und eine auf ihm liegende Skala.

d) Beliebige Verlegung der Achse b .

Eine beliebige Verlegung von b kann man sich aus den Fällen a) bis c) zusammengesetzt denken.

Sonderfälle

Die aus der Abb. 9 hergeleitete Beziehung $s = p \varphi \cdot \operatorname{tg} \gamma$ wurde unter der Voraussetzung $\gamma \neq 90^\circ$ abgeleitet. Für den aus ihr gewonnenen Radius $r = |p \cdot \operatorname{tg} \gamma|$ der Rastpolbahn (R) gilt daher die gleiche Voraussetzung. Der Fall $\gamma = 90^\circ$ ist demnach gesondert zu behandeln. Die Kotierung der Achse b wird für diesen Sonderfall besonders einfach, da b in jedem Augenblick der Schraubung Höhenlinie ist. Liegt die Achse b in der Ausgangslage ($\varphi = 0$) in der Höhe 0, so hat sie nach einer Schraubung um den Winkel φ die Höhe $z = p \varphi$.

Die Grundrißprojektion b' liege wieder in einem auf Klarpapier gezeichneten System S_2 , das sich um den Punkt a' der Grundrißebene (System S_1) dreht (vgl. Abb. 8; System S_3 entfällt). — Man kann jetzt im System S_1 um a' eine gleichmäßig unterteilte Kreisskala anbringen, deren Marke 0 sich in der Ausgangslage ($\varphi = 0$) mit einer in S_2 festen Ablesemarke deckt. Bei der Bezifferung werde — von der Marke 0 im mathematisch positiven Sinn ausgehend — an der Stelle $\varphi = \frac{z_v}{p}$ die Marke v angebracht. Dreht man nun das System S_2 um a' , bis die Ablesemarke über der Marke v erscheint, so liegt b — nach der dieser Drehung entsprechenden Schraubung — in der Höhe z_v (Kote v). Für jede Schraublage der Achse b kann man demnach die Kote zu b' auf der Kreisskala ablesen. — Damit ist die Aufgabe, zu der verschraubten Achse b die Kotierung zu finden, für den Sonderfall $\gamma = 90^\circ$ auf das Verfahren von O. Baier zurückgeführt. (Der Querschnitt der Regelschraubfläche $[\Theta]$ ist für $\gamma = 90^\circ$ die Achse b selbst.)

Wird der Radius $r = |p \cdot \operatorname{tg} \gamma|$ von (R) — insbesondere für γ nahe 90° — so groß, daß (R) auf der Zeichnung unzugänglich ist, so kann man an Stelle des Verfahrens mit zwei Systemen (vgl. Abb. 10) das Verfahren mit drei Systemen (vgl. Abb. 8) anwenden.

V. Kinematische Behandlung des Parallelkreisverfahrens

Um in einer zur Drehflächenachse b normalen Ebene δ den Radius ϱ des Parallelkreises (K) von $[\Psi]$ zu bestimmen, muß zuvor die Schnittkurve $(C) = \delta \times [\Phi]$ konstruiert werden. Der Radius ϱ folgt aus der Bedingung, daß sich (C) und (K) in einem Punkt Q berühren müssen (vgl. Abschnitt I, 2). Es soll nun gezeigt werden, wie die Schnittkurve (C) in der kotierten Projektion auf einfache Weise kinematisch erzeugt werden kann. Der Aufriß sei in Abb. 13 der besseren Anschaulichkeit wegen angegeben.

Wird eine Erzeugende (E) von $[\Phi]$ verschraubt, so durchläuft ihr Schnitt mit δ die Kurve (C) . Da es dabei nur auf die Relativbewegung ankommt, kann man auch — wie im folgenden — die Erzeugende (E) festhalten und die Ebene δ verschrauben.

Der Querschnitt (S) der Schraubfläche $[\Phi]$ möge gegeben sein und liege in der Höhe z_μ (Kote μ) [falls eine beliebige Erzeugende (E) gegeben ist, ist es zweckmäßig, sich zuerst (S) zu verschaffen]. In jedem Augenblick der Schraubung liegt eine Höhenlinie von δ in der Höhe z_μ des Querschnittes (S). Sofern sie (S) schneidet, ist dieser Schnittpunkt C_μ ein Punkt der Kurve (C) . (S) kann dabei von der Höhenlinie auch in mehreren Punkten C_μ geschnitten werden. Sucht man den Punkt C_v von (C) , der in der Ausgangslage die Höhe z_v hat, so kann man die Ebene δ um den Schraubwinkel $\varphi = \frac{z_\mu - z_v}{p}$ verschrauben. Ihre ursprüngliche Höhenlinie h_v gelangt dabei in die Höhe z_μ und wird so zu einer Höhenlinie h_μ . In dieser Lage liefert ihr Schnitt mit (S) (sofern er existiert) den gesuchten Punkt C_v von (C) . Da die Ebene δ senkrecht b

ist, kann im Grundriß ihr Gefällsmaßstab δ'^{13} und damit jede gewünschte Höhenlinie h'_v leicht eingezeichnet werden. a' und (S) mögen in einem System S_1 liegen, der Gefällsmaßstab δ' samt Lot l_0 von a' auf b' in einem auf Klarpapier gezeichneten System S_2 . Im System S_1 werde auf einem Kreis um a' mit beliebigem Radius an der Stelle $\varphi = \frac{z_\mu - z_v}{p}$ die Marke v angeschrieben (vgl. Abb. 13). Damit erreicht man folgendes: Deckt sich bei der Drehung von S_2 um a' das Lot l_0 (des Systems S_2) mit der

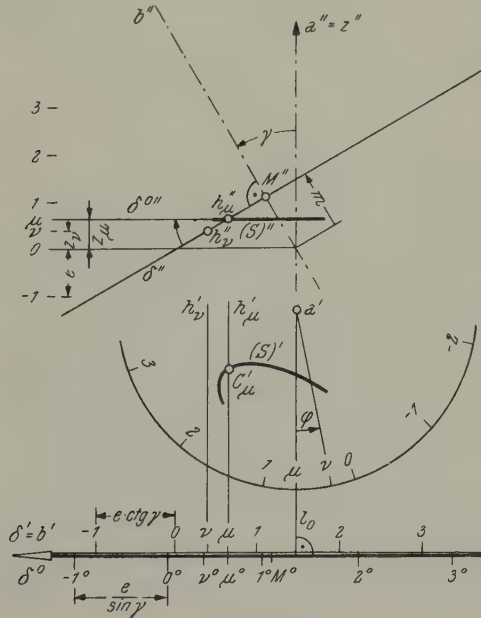


Abb. 13

die Abb. 9 hergeleiteten Beziehung $s = p \varphi \cdot \operatorname{tg} \gamma$, wenn man s durch $-s$ (entgegengesetzte Richtung) und γ durch $90^\circ + \gamma$ (Winkel z, δ) ersetzt, zu $s = p \varphi \cdot \operatorname{ctg} \gamma$ (Zwanglaufbedingung der drei Systeme). Das System S_4 bewege sich so parallel S_3 , daß sein Punkt C'_v einerseits entlang $(S)'$ und andererseits entlang der Geraden von S_3 wandern kann. Der Punkt C'_v von S_4 beschreibt dann im System S_2 die Kurve $(C)'$. Die Bahnnormale in einem beliebigen Punkt C'_v von $(C)'$ ist gleich dem von C'_v nach dem Momentanpol 24 gezogenen Polstrahl. Den Momentanpol 24 findet man mit Hilfe des vollständigen Polplans¹⁵. In jeder Bewegungslage ist $a' = 12$, und 13 liegt auf l_0 im Abstand $\bar{a} = \frac{v_{32}}{\omega_{21}} = \frac{s}{\varphi} = p \cdot \operatorname{ctg} \gamma$ von 12 (vgl. Abb. 14).

Das System S_3 führt gegen S_2 eine reine Schiebung aus, 23 $_{\infty}$ liegt also im Fernpunkt der zu b' normalen Richtung; S_4 führt gegen S_3 ebenfalls eine reine Schiebung aus,

¹³ Der Gefällsmaßstab einer Ebene wird durch eine gradierte Falllinie der Ebene dargestellt. Eine Falllinie schneidet die Höhenlinien der Ebene senkrecht, ist also eine Linie stärksten Gefälles.

¹⁴ A. Reuschel: Über ein einheitliches Konstruktionsprinzip zur Ermittlung der Krümmung von Bahnkurven und Hüllbahnen. Ein Beitrag zur Geometrie der Getriebe und zur graphischen Differentialgeometrie ebener Kurven. Österr. Ing.-Arch. 6, 9–23 (1949).

¹⁵ S_i, S_k und S_l seien drei beliebige Systeme einer ebenen, zwangläufigen, kinematischen Kette. Der Punkt von S_i , der momentan gegen S_k in Ruhe ist, wird als Momentanpol (oder relativer Drehpol) ik bezeichnet. Dabei ist $ik = ki$. Der Momentanpol il von S_i gegen S_l liegt in diesem Zeitpunkt auf der Verbindungsgeraden (Polgeraden) $ik - kl$ der Momentanpole ik und kl . Die Polgeraden und Momentanpole bilden den Polplan. — Ausführliche Erklärungen findet man in der unter der Fußnote¹⁴ zitierten Arbeit.

Kreismarke v , so wird bei der Schraubung die ursprüngliche Höhenlinie h_v von δ zu einer Höhenlinie h_μ und schneidet den in der Höhe z_μ liegenden Querschnitt (S) in einem Punkt C_v der Kurve (C) , d. h. im Grundriß (dargestellt durch S_1 und S_2) schneidet h'_v — da h'_v zu einer Höhenlinie h'_μ wird — den Querschnitt $(S)'$ im Punkt C'_v der Kurve $(C)'$.

Da man sehr leicht einen ebenen Zwanglaufmechanismus angeben kann, der $(C)'$ kinematisch erzeugt, läßt sich die Tangente an $(C)'$ und (falls gewünscht) der Krümmungskreis durch Anwendung eines von A. Reuschel angegebenen Verfahrens finden¹⁴. Der Mechanismus dazu bestehe außer den beiden Systemen S_1 und S_2 noch aus zwei weiteren Systemen S_3 und S_4 . Das System S_3 besteht aus einer Geraden (vgl. Abb. 14). Es bewege sich senkrecht gegen S_2 , und zwar so, daß die Gerade im System S_1 stets die Höhenlinie h_μ der verschraubten Ebene δ darstellt. Der dafür nötige Längsvorschub s (vgl. Abb. 14) folgt aus der für

34_∞ liegt also im Fernpunkt der zur Geraden von S_3 normalen Richtung, d. h. 34_∞ liegt im Fernpunkt von b' . 14 erhält man als Schnittpunkt der Polgeraden 13— 34_∞ mit der in C'_v auf $(S)'$ errichteten Normalen. 24_∞ liegt im Fernpunkt der Polgeraden 12—14, da die Bewegung von S_4 gegen S_2 auch eine Schiebung ist. 24_∞ gibt für C'_v die Richtung der Kurvennormalen von $(C)'$, d. h. die Tangente in C'_v ist senkrecht zu dieser Richtung.

Wie man sieht, liegt 14 für jeden beliebigen Punkt C'_v in S_2 auf der Parallelen d zu b' durch 13. Man kann also leicht mit den beiden ersten Systemen S_1 und S_2 auskommen, wenn man diese Parallele d in S_2 aufzeichnet. In jedem Punkt C'_v ist demnach die Normale von $(S)'$ zu zeichnen. Ihr Schnitt mit d ergibt 14, und 12—14 ist die Richtung von 24_∞ .

Die gleiche Konstruktion für die Normale bzw. Tangente des Punktes C'_v von (C) kann man auch mit dem Drehfluchtprinzip von Th. Schmid^{16, 17} herleiten. — Dabei wird der im Abstand p über der Grundrißebene auf der Schraubachse a liegende Punkt als Augpunkt einer zusätzlichen Zentralprojektion auf die Grundrißebene eingeführt. Unter dem Drehfluchtpunkt einer Geraden versteht man die Vierteldrehung ihres Fluchtpunktes um a , und zwar im Sinne einer Aufwärtsschraubung; unter der Drehfluchtspur einer Ebene versteht man entsprechend die Vierteldrehung ihrer Fluchtspur. — Im Punkt C'_v spannen die Tangente t_s von (S) und die Schraubtangente die Tangentialebene τ von $[\Phi]$ auf. Ihre Drehfluchtspur erhält man als Verbindungsgerade der Drehfluchtpunkte der beiden Tangenten. Drehfluchtpunkt der Schraubtangente ist der Punkt C'_v . Der Drehfluchtpunkt der Tangente t_s liegt im Fernpunkt¹⁸ der zu t_s normalen Richtung. Die Normale von $(S)'$ im Punkt C'_v ist demnach die Drehfluchtspur von τ . Die Schnittgerade der Ebenen τ und δ ist die Tangente von (C) . Ihr Drehfluchtpunkt liegt im Schnittpunkt der Drehfluchtspuren von τ und δ . Drehfluchtspur von δ ist die Gerade d , und 14 ist somit der Drehfluchtpunkt der Tangente von (C) , d. h. für den Punkt C'_v von $(C)'$ ist 12—14 die Richtung der Normalen.

Um die Kurve (C) selbst zu erhalten, ist die Ebene δ — in der (C) liegt — zur

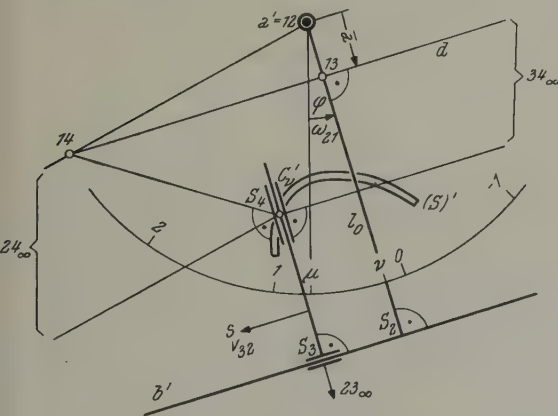


Abb. 14

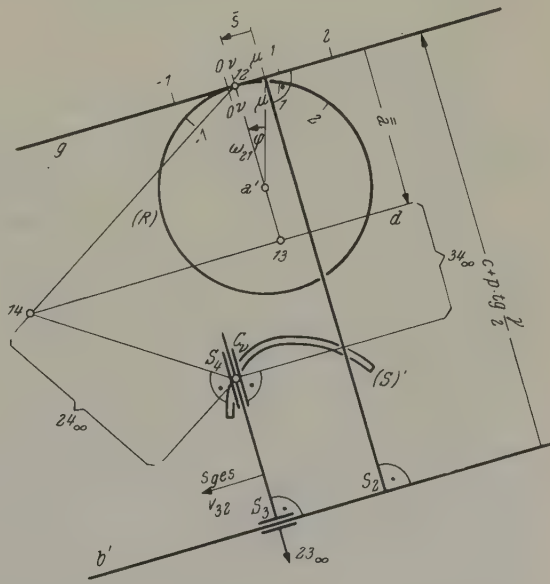


Abb. 15

Zeichenebene parallel zu drehen. Als Drehachse empfiehlt sich dazu die Ausgangslage ($\varphi = 0$) der Höhenlinie h_μ des Systems S_2 . Der für die Paralleldrehung erforderliche

¹⁶ S. Fußnote 3, S. 2.

¹⁷ S. Fußnote 6, S. 2.

Vorschub $\bar{s} = \Delta z \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = p \varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ von S_2 gegen S_1 ist proportional φ (vgl. Abb. 16). Man kann die Drehung von S_2 gegen S_1 gleichzeitig und zusätzlich mit dem Vorschub $\bar{s}$ ablaufen lassen, was sich kinematisch durch eine Kreisevolventenbewegung von S_2 gegen S_1 realisieren läßt. Man findet so die Kurve (C) direkt, ohne den Umweg über ihre Projektion $(C)'$. Da der Vorschub $\bar{s}$ durch die Kreisevolventenbewegung von S_2 gegen S_1 erzeugt werden soll, erhält man für den Radius r der Rastpolbahn (R) den Betrag $r = \left| \frac{\bar{s}}{\varphi} \right| = \left| p \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right|$.

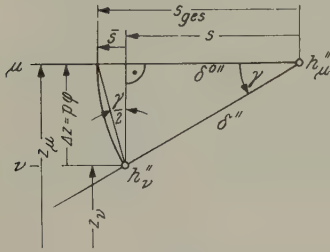


Abb. 16

Im System S_1 muß nun noch die Rastpolbahn (R) (Mittelpunkt a' , Radius $r = \left| p \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right|$) eingezeichnet werden; im System S_2 die Gangpolbahn g als Parallele zu b' im Abstand $c + p \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ (vgl. Abb. 15) und statt des Gefällsmaßstabes δ' der parallelgedrehte Gefällsmaßstab δ^0 (vgl. Abb. 13; die Koten parallelgedrehter Punkte sind mit einer hochgestellten Null gekennzeichnet). Auf dem Rastpolbahnkreis (R) wird an der Stelle $\varphi = \frac{z_\mu - z_v}{p}$ und auf der Gangpolbahn g im Abstand $\bar{s} = p \varphi \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ vom Momentanpol der Ausgangslage ($\varphi = 0$) jeweils die Marke v angeschrieben (vgl. Abb. 15). Damit erreicht man folgendes: Decken sich beim Abrollen von S_2 auf S_1 die Marken v von g und (R) , so wird die Höhenlinie h_v von δ zu einer Höhenlinie h_μ und gleichzeitig der Punkt C_v' von $(C)'$ zum parallelgedrehten Punkt C_v^0 von $(C)^0$, d. h. die parallelgedrehte Höhenlinie h_v^0 von δ^0 schneidet den Querschnitt $(S)'$ im Punkt $C_v^0 = C_v$ der Kurve $(C)^0 = (C)$.

Um im Punkt C_v die Tangente bzw. Normale von (C) zu finden, wird wieder das Verfahren von A. Reuschel benützt. Dazu werden wie vorher zwei weitere Systeme S_3 und S_4 eingeführt. Dem Drehwinkel φ von S_2 gegen S_1 muß jetzt aber ein Längsvorschub s_{ges} von S_3 gegen S_2 entsprechen, der sich aus dem Längsvorschub s und dem zusätzlichen Vorschub $\bar{s}$ zusammensetzt: $s_{ges} = s + \bar{s} = p \varphi \frac{1}{\sin \gamma}$ (folgt unmittelbar aus der Abb. 16). Der Momentanpol 12 ist der jeweilige Berührungspunkt der beiden Polbahnen g und (R) . 13 liegt auf dem im jeweiligen Momentanpol 12 auf g errichteten Lot im Abstand $\bar{a} = \frac{v_{32}}{\omega_{21}} = \frac{s_{ges}}{\varphi} = \frac{p}{\sin \gamma}$ von 12 (bzw. wie bei Abb. 14 im Abstand $\bar{a} = p \cdot \operatorname{ctg} \gamma$ von a'). Die Pole 23_∞ und 34_∞ sind wieder uneigentlich. 23_∞ liegt im Fernpunkt der zu b' normalen Richtung, und 34_∞ liegt im Fernpunkt von b' . Man erhält wieder wie vorher 14 als Schnittpunkt der Polgeraden $13-34_\infty$ mit der in C_v auf $(S)'$ errichteten Normalen. 24_∞ gibt für C_v die Richtung der Normalen n_c von (C) , d. h. die Tangente in C_v ist senkrecht n_c .

Wie man sieht, liegen 13 und 14 für jeden beliebigen Punkt C_v in S_2 auf der Parallelen d zu g im Abstand $\bar{a} = \frac{p}{\sin \gamma}$, d. h. man kann wiederum allein mit den beiden Systemen S_1 und S_2 auskommen, wenn man die Parallele d in S_2 aufzeichnet. In jedem Punkt C_v ist wieder die Normale von $(S)'$ zu zeichnen. Ihr Schnitt mit d ergibt 14, und 12–14 ist die Richtung von 24_∞ .

Die Normale n_c im Punkt C_v von (C) ist gleichzeitig senkrechte Projektion der Schraubflächennormalen des Punktes C_v auf die Ebene δ . Überträgt man sich den Durchstoßpunkt $M = b \times \delta$ in die parallelgedrehte Ebene δ^0 (System S_2), so ist M^0 der Mittelpunkt des in der Ebene δ^0 gesuchten Parallelkreises (K) von $[\Psi]$. Seinen Radius ϱ erhält man als Radius des kleinsten Kreises um M^0 , der (C) berührt. Der Berührungspunkt Q ist dann ein Eingriffspunkt (es kann allerdings vorkommen, daß kein solcher Kreis

existiert; dann ist die gewählte Achse b der Drehfläche $[\mathcal{P}]$ unbrauchbar). Damit also ein Punkt C_v von (C) Eingriffspunkt wird, muß dessen Normale n_c durch M^0 gehen (d. h. die Projektion n_c der Schraubflächennormalen n auf die Ebene δ muß durch die Projektion M^0 der Drehflächenachse b gehen, was auch unmittelbar aus der dem Normalenverfahren zugrunde liegenden Idee folgt).

Damit ist ein Weg aufgezeigt, wie man kinematisch die Kurve (C) sehr rasch punkt- und tangentialweise erzeugen kann. Sucht man den Schnitt der Schraubenfläche mit einer zu δ parallelen Ebene, so müssen lediglich in S_2 die parallelgedrehten Höhenlinien neu gezeichnet werden. Das Intervall des parallelgedrehten Gefällsmaßstabes bleibt dabei gleich groß.

Bei der praktischen Durchführung kann man darauf verzichten, die Höhenlinien für jeden Schnitt neu zu zeichnen, wenn man die Serie der ebenen Schnitte so legt, daß für jeden Schnitt nur der parallelgedrehte Gefällsmaßstab δ^0 neu beziffert werden muß (vgl. Abb. 17).

Durch Einführung weiterer Systeme ist es möglich, für jeden Punkt der Kurve (C) den Krümmungskreis zu konstruieren. Dazu genügen insgesamt neun Systeme.

Der Schraubwinkel φ entspricht (wie beim Normalenverfahren) dem Winkel, um den das System S_2 gegen seine Ausgangslage verdreht wird. φ ist gleich dem Zentriwinkel, der dem vom Momentanpol 12 auf (R) durchlaufenen Bogen zugeordnet ist (vgl. Abb. 15).

Für die praktische Durchführung ist es zweckmäßig, den gegebenen Querschnitt (S) der Schraubfläche $[\Phi]$ in der Grundrißebene anzunehmen, d. h. $z_u = 0$ zu wählen. Die in der Ebene $z_u = 0$ in gleichabständigen Schichtenebenen angeordnete Kreisskala im System S_1 zu bekommen

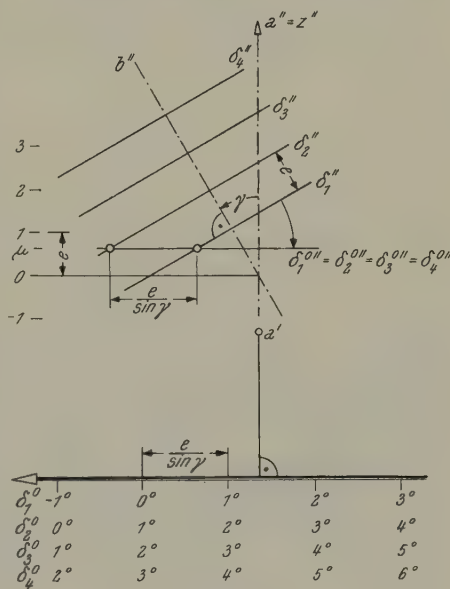


Abb. 17

VI. Wahl der Drehflächenachse b

1. Vorbemerkungen

Die Drehflächenachse b muß so gewählt werden, daß für jeden Punkt P der Erzeugenden die auf der Schraubfläche $[\Phi]$ errichtete Normale n beim Verschrauben längs der Bahnschraubenlinie von P in eine Lage $\bar{n}$ gelangt, in der sie b in einem Punkt T trifft. Diese bereits im Abschnitt II, 1 formulierte Eingriffsbedingung ist für sämtliche Achsen b nicht erfüllbar, die ganz im Innern des Zylinders $[\Omega]$ (Radius r_Ω) verlaufen, auf dem die Kehlschraubenlinie der von n erzeugten Regelschraubfläche $[\Sigma]$ liegt. Für jede nicht ganz im Innern von $[\Omega]$ liegende, sonst aber beliebig gewählte Achse b ist die Eingriffsbedingung — rein mathematisch betrachtet — unendlich oft erfüllbar, falls der Schraubwinkel ψ keiner Beschränkung unterliegt.

Um diesen Sachverhalt bequem überblicken zu können, werde das im Abschnitt II, 3 beschriebene Normalenverfahren etwas abgewandelt. Dazu werde durch die Achse b parallel zur Schraubachse a eine Hilfsebene σ^* gelegt. σ^* schneidet die durch Verschraubung von n erzeugte Regelschraubfläche $[\Sigma]$ in einer Kurve (S^*) . Der Schnitt von (S^*) mit der ebenfalls in σ^* liegenden Achse b ergibt dann den Treffpunkt T von $\bar{n}$ und b .

Da der Kurvenverlauf von (S^*) über die Existenz und Zahl der Punkte T Aufschluß gibt, sei die Kurve (S^*) etwas genauer betrachtet.

2. Diskussion der Kurve (S^*)

Für die Schraubung von n werde zunächst der Einfachheit halber der Schraubparameter $p = 0$ gewählt. Die so bei der Drehung von n um die Schraubachse a erzeugte Regelfläche $[\Sigma]$ ist dann ein Drehhyperboloid, d. h. der Schnitt (S^*) von $[\Sigma]$ mit σ^* ist eine Hyperbel. In jeder Drehlage von n ist der Durchstoßpunkt S_ψ^* von n mit σ^* ein Punkt von (S^*) . Der zugehörige Drehwinkel ψ sei sein Parameter. Die Tangente t_ψ^*

im Punkt S_ψ^* von (S^*) erhält man als Schnitt von σ^* mit der in S_ψ^* an $[\Sigma]$ gelegten Tangentialebene τ^* , die von n und der Parallelkreistangente in S_ψ^* aufgespannt wird. — Schließt der Grundriß n' der Schraubflächennormalen n in der Ausgangslage ($\psi = 0$) mit $\sigma^{*'} = b'$ den Winkel ω_0 ein (vgl. Abb. 18), so wird n nach einer Drehung um den Winkel $\psi = -\omega_0$ sowie nach einer Drehung um den Winkel $\psi = \pi - \omega_0$ zur Ebene σ^* parallel, d. h. die Durchstoßpunkte $S_{-\omega_0}^*$ und $S_{\pi-\omega_0}^*$ von n mit σ^* werden uneigentlich. Die Tangenten von (S^*) in diesen Fernpunkten $S_{-\omega_0}^*$ und $S_{\pi-\omega_0}^*$ sind die Asymptoten von (S^*) . Da die Tangentialebene τ^* in diesen Fernpunkten auf σ^* senkrecht steht, erhält man den Schnitt von τ^* mit σ^* , d. h. die Asymptoten, indem man die zu σ^* parallelen Lagen von n senkrecht auf σ^* projiziert.

Betrachtet man jetzt den Fall $p \neq 0$, so kann man die Kurve (S^*) aus derjenigen für $p = 0$ erhalten, wenn man jedem ihrer Punkte S_ψ^* in Richtung der Schraubachse den entsprechen-

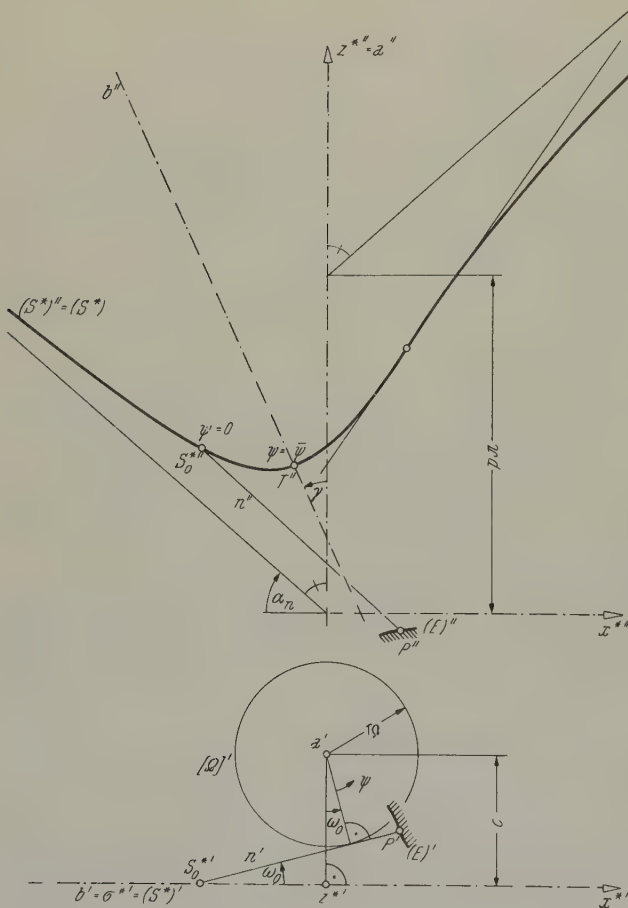


Abb. 18

den Vorschub $\Delta z^* = p \psi$ erteilt. Die Asymptoten erhält man wiederum, indem man die zu σ^* parallelen Lagen von n senkrecht auf σ^* projiziert. Die Asymptotenrichtungen bleiben also die gleichen wie im Falle $p = 0$; die Asymptoten werden aber in der Richtung der Schraubachse um den Abstand $p \pi$ auseinandergezogen (vgl. Abb. 18).

Unterliegt der Schraubwinkel ψ keiner Beschränkung, so besteht die Kurve (S^*) aus unendlich vielen Ästen, und man sieht jetzt leicht, daß die Achse b — sofern sie nicht ganz im Innern des Zylinders $[\Omega]$ liegt — von der Kurve (S^*) unendlich oft geschnitten wird.

Um die Kurve (S^*) auf Wendepunkte zu untersuchen, werde ihre Gleichung für den Parameter ψ aufgestellt. Der laufende Punkt S_ψ^* hat die Koordinaten

$$x^* = \frac{r_\Omega - c \cdot \cos(\omega_0 + \psi)}{\sin(\omega_0 + \psi)},$$

$$z^* = p(\omega_0 + \psi) + \frac{c - r_\Omega \cdot \cos(\omega_0 + \psi)}{\sin(\omega_0 + \psi)} \operatorname{tg} \alpha_n,$$

wobei $r_\Omega \geq 0$, $c \geq 0$ und $\alpha_n (|\alpha_n| \leq 90^\circ)$ die Neigung von n gegen die Grundrißebene ist (vgl. Abb. 18). Dabei ist, wie man leicht herleitet, $\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{r_\Omega}{p}$. Wählt man $\omega = \omega_0 + \psi$ als neuen Parameter, so führt die Bedingung für Wendepunkte auf folgende Bestimmungsgleichung für ω

$$r_\Omega p^2 \cdot \cos^2 \omega - 2 c p^2 \cdot \cos \omega - (c^2 - r_\Omega^2 - p^2) r_\Omega = 0. \quad (1)$$

Aus Gleichung (1) folgt für

$$r_\Omega \neq 0 \quad \cos \omega = \frac{c}{r_\Omega} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{r_\Omega^2} - 1\right) \left(1 + \frac{r_\Omega^2}{p^2}\right)} \quad (2)$$

$$r_\Omega = 0, c \neq 0 \quad \cos \omega = 0, \quad (3)$$

$$r_\Omega = c \neq 0 \quad \cos \omega = 1. \quad (4)$$

Der Fall $r_\Omega = c = 0$ ist trivial [da n beim Verschrauben entweder ganz in σ^* liegt oder σ^* nur auf der Schraubachse a schneidet, besteht (S^*) aus einzelnen Geraden].

Der Parameterbereich $k\pi \leq \omega \leq (1+k)\pi$ bestimmt für jeden k -Wert der Folge $k = \pm 0, 1, 2, 3, \dots$ einen Ast der Kurve (S^*). Die Gleichungen (3) und (4) liefern für jeden solchen Ast höchstens einen reellen Wendepunkt. Für $c < r_\Omega$ hat die Gleichung (2) keine reelle Lösung. Für $c > r_\Omega$ ergibt in (2) höchstens die negative Wurzel reelle Lösungen; andernfalls wäre $|\cos \omega| \leq 1$ nicht erfüllt. Insgesamt kann also jeder Ast von (S^*) höchstens einen reellen Wendepunkt besitzen.

Da demnach zwischen den beiden Asymptoten eines Astes höchstens ein reeller Wendepunkt liegen kann, folgt für den Neigungswinkel α_w ($|\alpha_w| \leq 90^\circ$) der Wendetangente gegen die x^* -Achse aus der geometrischen Anschauung die Ungleichung $|\alpha_w| > |\alpha_n|$, was sich auch analytisch nachweisen läßt.

3. Folgerungen für die Wahl der Achse b

Aus technischen Gründen wird man fordern, daß die vom rotierenden Werkzeug umhüllte Fläche eine zusammenhängende Drehfläche [Ψ] sein soll, d. h. von den unendlich vielen Ästen der Kurve (S^*) darf nur ein einziger zur Konstruktion von [Ψ] benützt werden. Man wählt dazu zweckmäßig den Ast mit dem Parameterbereich $0 \leq \omega \leq \pi$. Führt man wieder den Drehwinkel ψ als Parameter ein, so lautet der Parameterbereich $-\omega_0 \leq \psi \leq \pi - \omega_0$. Die Schnittpunkte T von $\bar{n}$ mit b müssen auf dem Teil der Schraubflächennormalen n liegen, der aus der bearbeiteten Werkstückoberfläche herausweist (vgl. Abschnitt IV). Daher darf zur Ermittlung der Lage $\bar{n}$ nur der Bereich von (S^*) herangezogen werden, der von diesem Teil der Normalen n erzeugt wird. Mit n sei im folgenden stets dieser Teil der Normalen gemeint.

Es werde zunächst der technisch sehr wichtige Fall $c > r_\Omega$ betrachtet. Fordert man ferner, daß sämtliche Punkte P der Erzeugenden (E) von der Schraubachse a einen Abstand $< c$ haben, so weist der von n erzeugte Ast von (S)* (Parameterbereich $-\omega_0 \leq \psi \leq \pi - \omega_0$) keine Lücken auf. Im folgenden sei mit (S^*) stets ein solcher Ast gemeint.

Bezeichnet man mit α_b ($|\alpha_b| \leq 90^\circ$) den Neigungswinkel der Achse b gegen die Grundrißebene, so folgt aus der Abb. 18, daß $|\alpha_b| > |\alpha_n|$ zwar keine notwendige, aber eine hin-

reichende Bedingung für die Existenz eines Schnittpunktes T von b mit (S^*) darstellt, und zwar erhält man genau einen Schnittpunkt T (bzw. Drehwinkel $\bar{\psi}$), falls $\operatorname{sgn} \gamma = \operatorname{sgn} p$ ist [für $\operatorname{sgn} \gamma \neq \operatorname{sgn} p$ gibt es, falls (S^*) einen Wendepunkt besitzt und $|\alpha_b| < |\alpha_w|$ ist, maximal drei Punkte T ; ist $|\alpha_b| > |\alpha_w|$ oder besitzt (S^*) keinen Wendepunkt, so gibt es genau einen Punkt T]. Die Bedingung $|\alpha_b| = |\alpha_n|$ ist für die Existenz von T ebenfalls hinreichend. Es existiert mindestens ein uneigentlicher Schnittpunkt T , außerdem können noch eigentliche Punkte T vorhanden sein. — Ist der Schnittpunkt T uneigentlich, so ist die Meridiannormale der Drehfläche $[\Psi]$ zur Drehflächenachse b parallel; die Meridiantangente von $[\Psi]$ ist dann senkrecht zu b . — Um sicherzugehen, daß es in dem betrachteten Fall Schnittpunkte T gibt, empfiehlt es sich, die Drehflächenachse b so zu wählen, daß für sämtliche Normalen n der Schraubfläche $[\Phi]$ die Bedingung $|\alpha_b| \geq |\alpha_n|$ erfüllt ist. Mit Berücksichtigung von $|\alpha_b| + |\gamma| = 90^\circ$ kann diese Bedingung auch durch $|\gamma| \leq 90^\circ - |\alpha_n|$ ausgedrückt werden. Wählt man ferner das Vorzeichen von γ nach der Bedingung $\operatorname{sgn} \gamma = \operatorname{sgn} p^{18}$, so existiert im Falle $|\alpha_b| > |\alpha_n|$ stets ein und nur ein Schnittpunkt; im Falle $|\alpha_b| = |\alpha_n|$ gibt es entweder zwei Schnittpunkte — einen eigentlichen und einen uneigentlichen — oder einen Schnittpunkt, der uneigentlich ist.

Betrachtet man den Fall $c < r_\Omega$, so bleiben die für den Fall $c > r_\Omega$ ausgeführten Überlegungen im wesentlichen gültig, wenn man die Rollen von b und n miteinander vertauscht, d. h. durch n eine Hilfsebene parallel zur Schraubachse a legt und die von der verschraubten Achse b in ihr erzeugte Kurve betrachtet. Die hinreichende Bedingung für die Existenz von Schnittpunkten T lautet dann $|\alpha_b| \leq |\alpha_n|$. Da die Achse b nur außerhalb der vom bearbeiteten Werkstück begrenzten Oberfläche liegen kann, ist in diesem Fall $\operatorname{sgn} \gamma \neq \operatorname{sgn} p$ zu wählen. Bei sich schneidenden Achsen b und a wählt man oft $\gamma = 90^\circ$ (Fingerfräser).

VII. Durchführung der Meridiankonstruktion an einem Beispiel

1. Aufgabenstellung

Es sei eine Schraubfläche $[\Phi]$ von gegebenem Querschnitt $(S)^{19}$ (vgl. Abb. 19) und der Ganghöhe $h = 432$ herzustellen. Für die Punkte $P_0, P_1, \dots, P_{14}$ von (S) sind die Koordinaten x, y und für ihre Tangenten die Ableitungen y' in Tabelle 1 zusammengestellt. Die Schraubnut $[\Phi]$ soll aus einer kreiszylindrischen Welle vom Durchmesser 240 herausgefräst werden. Gesucht ist der Meridian eines dazu geeigneten Fräasers (Drehfläche $[\Psi]$).

Tabelle 1

Punkt	x	y	y'
P_0	84,853	84,853	— 1,0000
P_1	91,718	75,906	— 1,7321
P_2	96,034	65,487	— 3,7320
P_3	97,506	54,306	∞
P_4	96,034	43,125	3,7320
P_5	91,718	32,706	1,7321
P_6	86,466	25,329	1,1604
P_7	80,689	19,820	0,7603
P_8	75,098	16,663	0,1628
P_9	73,031	15,732	0,8169
P_{10}	71,706	13,892	2,6389
P_{11}	71,479	11,636	— 6,1428
P_{12}	72,023	7,570	— 9,5144
P_{13}	72,321	3,790	— 19,0811
P_{14}	72,420	0	∞

2. Wahl der Fräserachse

Man legt die Fräserachse (Drehflächenachse b) zweckmäßig so, daß das gemeinsame Lot von a und b auf der Symmetrielinie des Querschnittes (S) liegt (in Abb. 19 ist die x -Achse Symmetrielinie). Dann wird der Meridian von $[\Psi]$ ebenfalls symmetrisch.

¹⁸ $\operatorname{sgn} \gamma \neq \operatorname{sgn} p$ hat in dem betrachteten Fall keine praktische Bedeutung. Da die Parallelkreise der scheibenförmigen Drehfläche $[\Psi]$ in den Eingriffspunkten quer zur Richtung der Bahnschraubenlinien von $[\Phi]$ liegen würden, bestünde große Gefahr für Unterschnitt.

¹⁹ Der Querschnitt (S) ist eine spezielle Erzeugende (E) der Schraubenfläche.

Der Achsabstand c von Fräserachse b und Schraubachse a werde zu $c = 222$ angenommen. Damit liegt für sämtliche Punkte von (S) der Fall $c > r_\Omega$ vor, und jeder Punkt von (S) hat von a einen Abstand $< c$. Gemäß den im Abschnitt VI, 3 für diesen Fall gezogenen Folgerungen wählt man den Anstellwinkel γ so, daß $|\gamma| \leq 90^\circ - |\alpha_n|$ und $\text{sgn } \gamma = \text{sgn } p$ erfüllt sind. Dazu ist zunächst derjenige Punkt von (S) zu ermitteln, dessen Schraubflächennormale die größte Neigung $|\alpha_n|$ gegen die Grundrißebene besitzt. Die senkrecht auf die Ebene des Querschnittes (S) projizierte Schraubflächennormale eines Querschnittspunktes P fällt mit der Querschnittsnormale von P zusammen. Da für die Neigung der Schraubflächennormalen $\text{tg } \alpha_n = \frac{r_\Omega}{p}$ gilt, braucht man nur die Querschnittsnormale aufzusuchen, die von a' den größten Abstand r_Ω hat. Das ist für die Normale von P_8 der Fall. Wählt man in der Ungleichung das Gleichheitszeichen, so folgt $|\gamma| = 90^\circ - |\alpha_n| = 41,836^\circ$. Da $p = \frac{h}{2\pi}$ positiv ist, wird γ auch positiv ($\text{sgn } \gamma = \text{sgn } p$). Damit ist die Achse b festgelegt. Gemäß Abschnitt VI, 3 existiert somit für jeden Querschnittspunkt (außer P_8) genau ein Eingriffspunkt (für P_8 können, da das Gleichheitszeichen gewählt wurde, entweder ein oder zwei Eingriffspunkte existieren).

3. Meridiankonstruktion

a) Anwendung des im Abschnitt IV angegebenen Verfahrens. Im System S_1 wird der Querschnitt (S) und die Rastpolbahn (R) — Kreis um a' mit Radius $r = |p \cdot \operatorname{tg} \gamma| = \left| \frac{h}{2\pi} \operatorname{tg} \gamma \right| = 61,55 -$

ingezeichnet (vgl. Abb. 20). Auf einem Klarpapier (System S_2) zeichnet man b' und im Abstand $c + p \cdot \operatorname{tg} \gamma = 283,55$ die Gangpolbahn g (vgl. Abb. 21).

Es ist zweckmäßig, den Abstand aufeinanderfolgender Schichtenebenen konstant zu halten. Dazu kann man die Ganghöhe h in eine Anzahl gleicher Teile teilen. Wählt man z. B. zwölf Teile, so kann man den Schichtenebenen mit den Höhen $z = \frac{h}{12}, 2 \frac{h}{12}, \dots, 6 \frac{h}{12}$ die Knoten 1, 2, $\dots$, 6 zuordnen und den mit den Höhen $z = -\frac{h}{12}, -2 \frac{h}{12}, \dots, -6 \frac{h}{12}$ die Knoten $-1, -2, \dots, -6$ (vgl. Abb. 19). Für die Achse b' erhält man dann das Intervall $i_b = \frac{h}{12} \operatorname{tg} \gamma = 32,229$ (vgl. Abb. 21) und für die Normale n' im Punkt P von (S) das Intervall $i_n = \frac{h}{12} \operatorname{ctg} \alpha_n = \frac{h}{12} \frac{p}{r_\Omega}$ (in Abb. 20 ist nur die Normale n_8 für den Punkt P_8 eingezeichnet). Es ist bequem, für die Gangpolbahn die gleiche

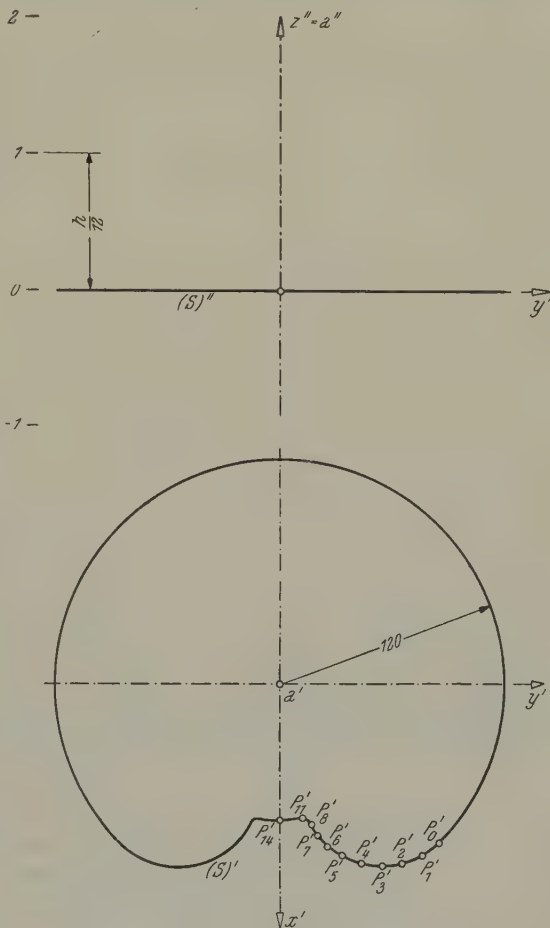


Abb. 19

Bezifferung wie bei b' zu wählen. (R) ist dann ebenfalls in zwölf gleiche Teile zu teilen. Um bei der Bewegung von S_2 gegen S_1 die einzelnen Lagen bequem und genau einstellen zu können, kann man in den auf g markierten Skalenpunkten die Normalen zu g zeichnen, bis zur Geraden im Abstand c von b' , auf der a' bei der Bewegung des Systems S_2 stets liegen muß. Man kann auch — zu demselben Zweck — in S_1 um a'

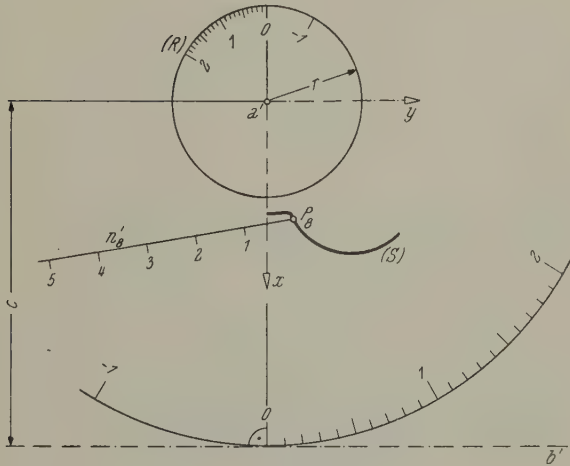


Abb. 20

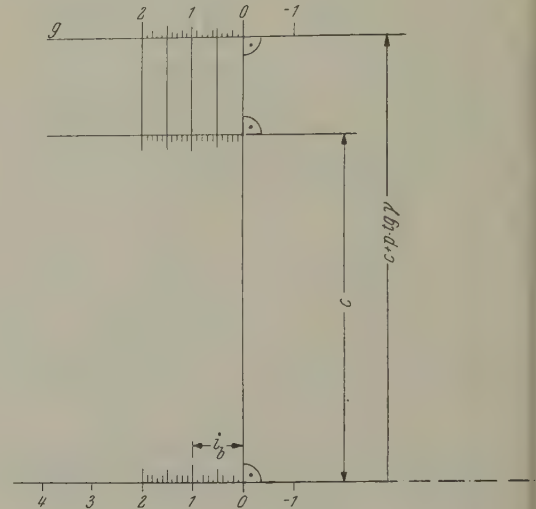


Abb. 21

einen Kreis mit Radius c zeichnen. Zieht man von den Skalenpunkten von (R) durch a' Strahlen bis zu diesem Kreis und bringt auf ihnen die gleichen Marken an, wie die Strahlen auf (R) anzeigen, so müssen, wenn bei der Bewegung die Marken v von g und (R) sich decken, auch die Marken v von b' und diesem Kreis sich decken. Auf diese Weise kann man die zu einem Skalenpunkt v gehörende Lage von S_2 sehr genau einstellen.

Tabelle 2

Punkt	$\bar{\varphi}$	m	q	m_n	m_t
P_0	0,615	— 45,1	104,8	— 57,6	—
P_1	0,575	— 37,8	105,0	— 13,3	—
P_2	0,535	— 32,4	108,0	34,6	—
P_3	0,495	— 26,2	112,6	87,2	—
P_4	0,463	— 21,2	119,8	—	— 99,0
P_5	0,428	— 17,0	127,8	—	— 73,0
P_6	0,374	— 13,9	134,6	—	— 58,6
P_7	0,306	— 12,5	140,0	—	— 46,4
P_8	0,142	— 11,4	145,5	—	— 14,2
P_9	0,145	— 10,6	147,6	—	— 69,6
P_{10}	0,136	— 9,6	149,2	117,6	—
P_{11}	0,126	— 8,0	150,2	— 11,8	—
P_{12}	0,084	— 5,3	149,7	— 7,4	—
P_{13}	0,041	— 2,6	149,6	— 3,8	—
P_{14}	0	0	149,58	0	—

In Tabelle 2 sind die mit Hilfe der Bewegung von S_2 gegen S_1 für die Punkte $P_0, P_1, \dots, P_{14}$ gefundenen $\bar{\varphi}$ -Werte angegeben, ebenso die durch jeweiliges Parallel-

drehen der Ebene $\bar{\varepsilon}$ gefundenen Koordinaten m und ϱ der zugehörigen Meridianpunkte sowie die Werte m_n bzw. m_t für die Meridiannormalen bzw. Meridiantangenten (vgl. Abb. 22).

b) Anwendung des im Abschnitt V angegebenen Verfahrens. Der Radius des Rastpolbahnkreises (R) folgt zu $r = \left| p \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right| = 26,28$. Auf Klarpapier (System S_2) ist die Gangpolbahn g , die Parallele d und der parallelgedrehte Gefällsmaßstab δ^0 zu zeichnen. Für die durch $m = -45,1$ festgelegte Parallelkreisebene δ sei die in S_2 ermittelte Kurve (C) angegeben (vgl. Abb. 23). Man erhält für den die Kurve (C) berührenden Parallelkreis (K) den Radius $\varrho = 104,8$. Wie man sieht, verursacht (K) keinen Unterschnitt.

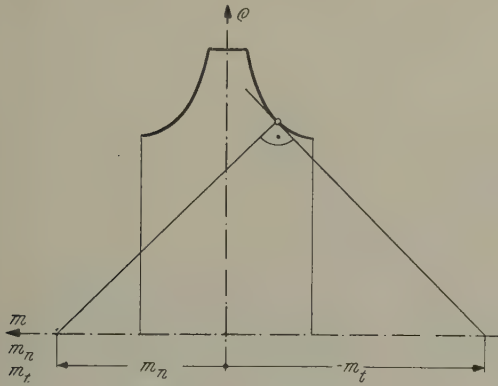


Abb. 22

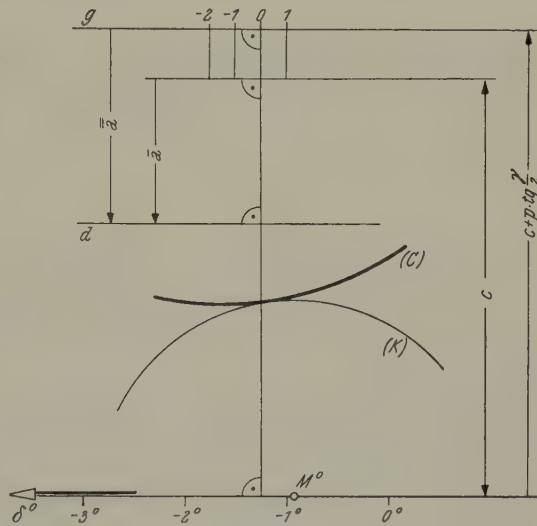


Abb. 23

c) Die berechneten Werte. Zur Rechnung werde die von W. Wunderlich angegebene analytische Behandlung des Normalenverfahrens benutzt²⁰. Für jeden Punkt $P(x, y, z)$ der Erzeugenden (E) folgt $\bar{\varphi}$ aus der transzendenten Gleichung

$$\bar{\varphi} = -\frac{A \sin \bar{\varphi} + B \cos \bar{\varphi} + C}{p(\eta \sin \bar{\varphi} + \xi \cos \bar{\varphi})}, \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} A &= (y \zeta - z \eta) + c \xi \operatorname{ctg} \gamma, \\ B &= (x \zeta - z \xi) - c \eta \operatorname{ctg} \gamma, \\ C &= -\zeta (c + p \operatorname{ctg} \gamma) \end{aligned} \quad (5)$$

und (ξ, η, ζ) die Komponenten der zu P gehörenden Schraubenflächennormalen sind.

Benützt man die zeichnerisch gefundenen $\bar{\varphi}$ -Werte (vgl. Tabelle 2) als Rohwerte, so kann man aus Gleichung (5) durch Iteration die Werte $\bar{\varphi}$ beliebig genau ermitteln. Als Iterationsverfahren empfiehlt sich das von Newton oder ein Verfahren, das O. Baier in seinen Vorlesungen über Graphische und numerische Methoden an der Technischen Hochschule Stuttgart angibt. Dabei wird die Gleichung (5), die die Form $\bar{\varphi} = f(\bar{\varphi})$ hat, auf die Form

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{f(\bar{\varphi}) - \bar{\varphi} f'(\bar{\varphi})}{1 - f'(\bar{\varphi})} = f^*(\bar{\varphi}) \quad (6)$$

gebracht, wobei $f'(\bar{\varphi})$ die Ableitung von $f(\bar{\varphi})$ nach $\bar{\varphi}$ ist. $\bar{\varphi}_1$ ist der durch den ersten Iterationsschritt verbesserte Wert. Allgemein lautet die Iterationsvorschrift

$$\bar{\varphi}_{n+1} = f^*(\bar{\varphi}_n), \quad (7)$$

²⁰ S. Fußnote 6, S. 2.

wobei $\bar{\varphi}_n$ der durch n Schritte verbesserte Wert ist. Da man nach jedem Iterationsschritt erneut die Ableitung $f'(\bar{\varphi}_n)$ bildet, konvergiert das Verfahren besonders rasch, außerdem ist dadurch die Konvergenz des Verfahrens stets gesichert.

Nachdem $\bar{\varphi}$ durch Iteration genügend genau verbessert ist, kann man die Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ des Eingriffspunktes Q berechnen. Da man Q durch Verschrauben des Punktes $P(x, y, z)$ um den Schraubwinkel $\bar{\varphi} = -\bar{\varphi}$ erhält (vgl. Abb. 3), folgt

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \cos \bar{\varphi} + y \sin \bar{\varphi}, \\ \bar{y} &= y \cos \bar{\varphi} - x \sin \bar{\varphi}, \\ \bar{z} &= z - p \bar{\varphi}.\end{aligned}\tag{8}$$

Die Werte m , ϱ , m_n und m_t (vgl. Abb. 12 und Abb. 22) folgen zu

$$m = -\bar{y} \sin \gamma + \bar{z} \cos \gamma,\tag{9}$$

$$\varrho^2 = (\bar{y} \cos \gamma + \bar{z} \sin \gamma)^2 + (\bar{x} - c)^2,\tag{10}$$

$$m_n = -\frac{c \bar{y} + p \bar{z}}{\bar{x} \sin \gamma - p \cos \gamma},\tag{11}$$

$$m_t = m + \frac{\varrho^2}{m - m_n}.\tag{12}$$

Sie sind in Tabelle 3 für die Punkte $P_0, P_1, \dots, P_{14}$ angegeben.

Tabelle 3

Punkt	$\bar{\varphi}$	m	ϱ	m_n	m_t
P_0	0,6162	— 45,04	104,55	— 56,86	—
P_1	0,5749	— 38,68	104,99	— 12,74	—
P_2	0,5342	— 32,35	107,68	33,20	—
P_3	0,4954	— 26,33	112,51	87,31	—
P_4	0,4586	— 20,93	119,22	—	— 99,72
P_5	0,4194	— 16,50	127,35	—	— 73,25
P_6	0,3626	— 13,91	133,96	—	— 59,95
P_7	0,2919	— 12,13	140,00	—	— 46,19
P_8	0,1346	— 11,19	145,35	—	— 13,78
P_9	0,1395	— 10,76	147,51	—	— 70,05
P_{10}	0,1340	— 9,66	149,11	114,72	—
P_{11}	0,1264	— 8,16	149,68	— 11,66	—
P_{12}	0,0820	— 5,30	149,62	— 7,57	—
P_{13}	0,0410	— 2,65	149,59	— 3,78	—
P_{14}	0	0	149,58	0	—

4. Bemerkungen zur Werkzeugherstellung

Oft werden Fräser als sogenannte hinterdrehte Formfräser mit radial verlaufender Zahnbrust ausgeführt. Solche Fräser haben den Vorzug, daß sich ihr Profil beim radialen Nachschleifen der Zahnbrust nicht ändert. Beim Fräsen von Schraubnuten läßt sich dieser Vorzug jedoch nicht ausnützen. Nach der durch das Schärfen erforderlichen Zustellung des Werkzeuges (Verkleinerung des Abstandes c) erzeugt nämlich der Fräser — trotz unverändertem Profil — nicht mehr die exakt richtige Schraubenfläche, da jede Änderung von c — wenigstens theoretisch — ein neues Fräserprofil erfordert. Bei hohen Genauigkeitsansprüchen kann ein auf diese Weise nachgeschliffener Formfräser nur noch zum Schruppen oder Vorfräsen der Schraubnut dienen. Da der erwähnte

Vorzug des hinterdrehten Formfräasers beim Fräsen von Schraubenflächen nicht ins Gewicht fällt und außerdem mit dem Nachteil eines Spanwinkels von 0° erkaufte würde, wird man in vielen Fällen von vornherein den Fräser nicht als hinterdrehten Formfräser ausführen, sondern im Sinne besserer Zerspanungseigenschaften einen positiven Spanwinkel wählen. Die einzelnen Schneiden des Werkzeuges brauchen nicht mit dem Meridian der Drehfläche $[\Psi]$ übereinzustimmen, sie müssen nur bei der Rotation die Drehfläche $[\Psi]$ überstreichen.

Werden an die Oberflächengüte der zu bearbeitenden Schraubenfläche hohe Ansprüche gestellt, so wird im allgemeinen die vorgefräste Schraubenfläche durch Schleifen fertigbearbeitet. Dabei ist zu beachten, daß auch hier ein Abrichten der Schleifscheibe eine Änderung des Abstandes c bewirkt. Die Schleifscheibe muß also jeweils dem neuen Achsabstand entsprechend abgerichtet werden. Es empfiehlt sich daher, für verschiedene Zustellgrößen Δc (Änderung von c) die Meridiane zu ermitteln und beim Abrichten jeweils die dem einzelnen Meridian zugehörige Zustellung genau einzuhalten.

(Eingegangen am 9. September 1959)

Der Windungskurzschlußstrom großer Synchronmaschinen

Von Franz Ollendorff, Haifa (Israel)

Mit 18 Textabbildungen

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung des Windungskurzschlußstromes für eine Wechsellpolmaschine vom Volltrommeltyp. Es wird ein Modell der Maschine angegeben, welches die Aufspaltung ihres aktiven Magnetfeldes in einen Kernanteil und einen Stirnanteil gestattet; im erstgenannten sind Ständer und Läufer miteinander verkettet, während das Stirnfeld wesentlich vom Windungskurzschlußstrom allein gespeist wird. Im Dauerzustand resultiert das Kernfeld aus dem „eingepprägten“ primären Anteil der Läufererregung und dem sekundären Anteil der Ständerückwirkung, welche ihrerseits durch eine sowohl nach den zeitlichen Fourier-Komponenten des Kurzschlußstromes wie nach den räumlichen Teilwellen des Reaktionsfeldes fortschreitende trigonometrische Reihe dargestellt wird; da diese Reihe jedoch nur langsam konvergiert, muß man sich bei ihrer Aufsummierung mit einer Näherung begnügen. Mittels konformer Abbildung gelingt es, die Ankerreaktion des Kernfeldes hinreichend genau durch Jacobische elliptische Funktionen darzustellen. Dagegen erweist sich die Struktur des Stirnfeldes als so verwickelt, daß sie nur unter vereinfachenden Voraussetzungen analytisch beschrieben werden kann. Unter Vermittlung einer mit elementaren Funktionen zu bewältigenden konformen Abbildung läßt sich das Stirnfeld auf eine doppelreihige Wirbelstraße zurückführen. Die Zusammenfassung des sekundären Kernfeldes mit dem Stirnfeld gipfelt in der Angabe der resultierenden Windungsinduktivität, mit deren Hilfe die Stärke des dauernden Windungskurzschlußstromes explizit berechnet werden kann; seine Intensität wird mit jener des dreipoligen, symmetrischen Dauerstromes verglichen, welcher sich beim Klemmenkurzschluß der Maschine entwickelt.

Summary. The present paper deals with the calculation of the short-circuit current as appearing in an alternator equipped with a drum-shaped rotor. Starting with a simplified model of the machine it is shown that the active magnetic field can be split into a part containing the nucleus of the machine and another part containing its faces. In the former the stator of the machine is mutually linked with the rotor but in the latter the field is essentially excited by the short-circuit current alone. In the steady state the nucleus field results from the primary component created by the rotor current and the secondary field of the stator reaction. This reaction is described by a double Fourier-series progressing in accordance both with the time depending waves of the short-circuit current and the space distribution of the induction in the air gap separating stator and rotor. Because of the unsatisfactory convergence of the above mentioned series it is necessary to sum it approximatively, and this is done with the help of Jacobi's Elliptic functions. Contrarily to that the structure of the face-field is so complicated that its analytical description requires some simplifying assumptions. It has been shown, that a conformal mapping based on elementary functions reduces the problem to the well-known field of a double-lined street of

eddies. Composing the nucleus field with the face-room field the resulting inductivity of the damaged winding is obtained permitting the explicit computation of the steady short-circuit current of the damaged winding; its intensity is compared with the intensity of the steady short-circuit current caused by the symmetric three-phase short-circuit of the whole machine.

Beim Windungsschluß im Ständer einer synchronen Wechselstrommaschine entsteht in der beschädigten Windung ein elektrischer Strom, dessen Stärke in der Regel über ihr nominales Maß weit hinausgeht. Zuzufolge der thermischen und mechanischen Wirkungen dieses Überstromes kann sich der Schaden vom Störungsherd aus rasch verbreiten und zum Niederbruch der gesamten Maschine führen. Um einer solchen Katastrophe vorzubeugen, hat man automatische Schutzeinrichtungen zu entwickeln, welche sogleich nach Eintritt des Windungsschlusses die Maschine vom Netz trennen und ihre magnetische Läufererregung unterbrechen. Sowohl der Bau hierzu geeigneter Relais wie deren jeweilige Justierung erfordern die quantitative Kenntnis des Windungskurzschlußstromes samt der mit ihm genetisch verknüpften magnetischen Ankerreaktion; die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der analytischen Lösung dieser Aufgaben.

Grundannahmen

Wir beschränken uns weiterhin auf die Untersuchung des Windungsschlusses in einer sogenannten Wechseipolmaschine vom Volltrommeltyp, welche längs ihres elektromagnetisch aktiven Umfanges mit der ganzen Zahl $p \geq 1$ von Polpaaren ausgestattet sei.

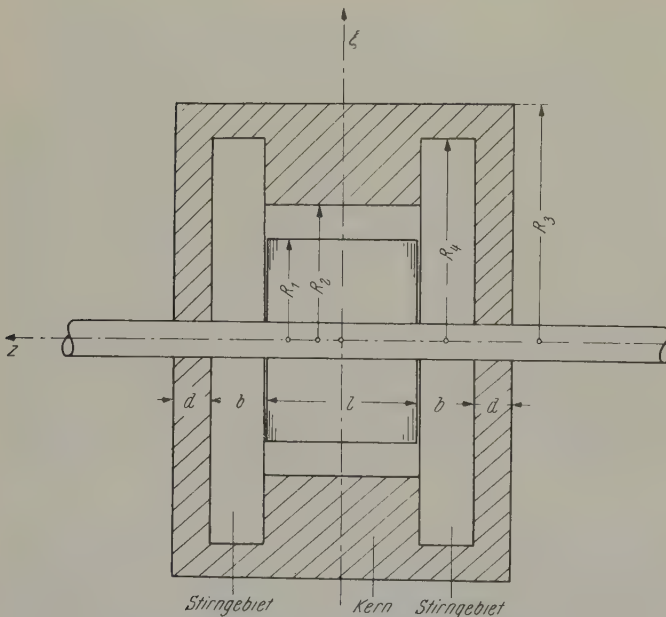


Abb. 1. Orientierung im Modell der Maschine

Unter bewußtem Verzicht auf konstruktive Einzelheiten gehen wir zu dem in Abb. 1 dargestellten Modell der Maschine über, in welchem wir zwei funktionell wesentlich voneinander verschiedene Gebiete unterscheiden.

1. Der Kern der Maschine besteht aus ihrem Läufer und ihrem Ständer der merklich gleichen axialen Länge l . Lassen wir die zur Aufnahme der Stromleiter bestimmten Nuten vorerst außer acht, so erscheint also der Läufer als Kreiszylinder vom Halbmesser R_1 , während der Ständer durch den zum Läufer konzentrischen Hohlzylinder vom Innenhalbmesser $R_2 > R_1$ und vom Außenhalbmesser $R_3 > R_2$ repräsentiert wird.

2. An den Kern schließen sich beiderseitig die Stirngebiete der Maschine an. Sie werden in axialer Richtung durch die senkrecht zur Achse orientierten Abschlußplatten je der Stärke d begrenzt, deren Innenflächen von den beziehentlich benachbarten Stirnflächen des Kernes den festen Abstand b aufweisen; in radialer Richtung hingegen werden die Stirngebiete durch je den Hohlzylinder vom Außenhalbmesser R_3 und vom Innenhalbmesser R_4 bei der Wahl $R_2 < R_4 < R_3$ abgeschlossen.

Wir orientieren uns im Maschinenmodell mit Hilfe des ständerfesten Bezugssystems der Zylinderkoordinaten z (Achse), r (Radialdistanz) und α (Azimut), in welchem die einheitliche, laufende Zeit t gemessen wird. Der Ursprung dieser Konfigurationskoordinaten wird in den Schwerpunkt des (massenhomogenen) Läufers gelegt; die z -Achse koinzidiere mit dem Zentrum der Maschinenwelle, und ihre positive Richtung werde derart gewählt, daß die am Aufpunkt (z, r, α) konstruierten vektoriellen Differentiale dz , dv und $r d\alpha$ in der angegebenen Reihenfolge ein rechtshändiges Lokalsystem bilden.

Wir ergänzen die geometrische Beschreibung des Maschinenmodells durch die Angabe seiner elektromagnetischen Eigenschaften:

1. Dem Läufer, dem Ständer, den seitlichen Abschlußplatten der Stirngebiete und ihren radialen Abschlußzylindern schreiben wir die allerdings nur ideelle Eigenschaft der „vollkommenen“ Permeabilität μ zu, welche durch den Grenzübergang

$$\mu \rightarrow \infty \quad (1)$$

definiert wird; dagegen soll die Ohmsche Leitfähigkeit κ dieser Maschinenelemente verschwindend klein ausfallen.

2. Die stromführenden Leiter sowohl des Ständers wie des Läufers statuen wir mit der gleichermaßen nur ideellen Eigenschaft „vollkommener“ Ohmscher Leitfähigkeit aus, welche durch den Prozeß

$$\kappa \rightarrow \infty \quad (2)$$

definiert wird; gleichzeitig gelten diese Leiter in dem Sinne als unmagnetisch, daß ihre Permeabilität μ merklich der Einheit gleichgesetzt wird.

Im Lichte des Poyntingschen Strahlungssatzes beschränken sich auf Grund der vorstehenden Annahmen die für die Arbeit der Maschine verantwortlichen Anteile ihres elektromagnetischen Feldes auf den sogenannten Luftspalt des Kernes

$$|z| < \frac{1}{2} l; \quad R_1 < r < R_2; \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \quad (3)$$

und die beiden Stirnräume

$$\frac{1}{2} l < |z| < \frac{1}{2} l + b; \quad 0 \leq r < R_4; \quad 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (4)$$

Dagegen sind die jeweils diesen Gebieten eingelagerten Stromleiter vom Existenzbereich des Feldes auszuschließen. Über die Gestalt dieser Leiter treffen wir folgende Festsetzungen:

1. Die Erregerwicklung der Maschine sei flächenhaft auf dem Mantel $r = R_1$ des Läuferzylinders einschließlich seiner Stirnflächen $|z| = \frac{l}{2}$, $0 \leq r < R_1$ ausgebreitet. Da sie auf Grund der Annahme (2) keinen Ohmschen Widerstand aufweisen, gestatten sie bereits ohne die Mitwirkung eingepprägter elektromotorischer Kräfte den dauernden Verkehr in sich geschlossener elektrischer Ströme von endlicher Intensität.

2. Die Ankerleiter der Maschine sind innerhalb des Kernbereiches $|z| < \frac{l}{2}$ in Nuten eingebettet, welche am inneren Ständerumfang je wesentlich parallel der Maschinenachse verlaufen. Je zwei solcher Leiter, die auf dem Zylinder $r = R_2$ etwa um den Polbogen

$$\tau = \frac{\pi R_2}{p} \quad (5)$$

voneinander abstehen, werden zu einer Windung zusammengeschaltet. Sowohl aus technologischen Gründen wie auch mit Rücksicht auf die mechanische und elektrische Festigkeit der Wicklungsköpfe muß man diesen in je einem der beiden Stirnräume

auszuführenden Verbindungen eine Form geben, welche wohl kaum durch eine hinreichend einfache, einheitliche geometrische Vorschrift geschildert werden kann. Um die hierdurch angezeigte Schwierigkeit zu überwinden, stilisieren wir die Gestalt der Stirnköpfe entsprechend Abb. 2. Die Ankerleiter werden beiderseits ihrer Wohnnut je um das Maß $\frac{1}{2}b$ in die Stirnräume hinaus verlängert und dort durch einen Leiter-

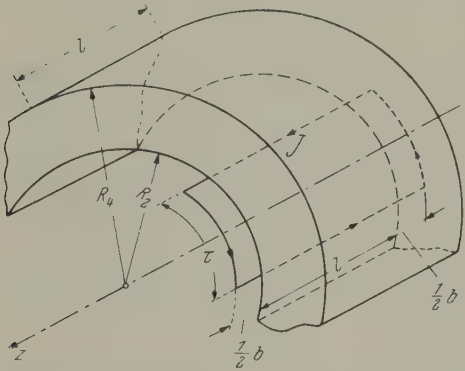


Abb. 2. Torso des Ständers, welcher die beschädigte Windung enthält. J bezeichnet den Windungskurzschlußstrom

bogen vom Halbmesser R_2 und der Länge τ miteinander verbunden. Mit der Zustimmung zu dieser vereinfachten Anordnung müssen wir uns freilich nicht allein auf gewisse quantitative Abweichungen zwischen den theoretisch zu erwartenden Erscheinungen und deren wirklichem Ablauf gefaßt machen, sondern wir verzichten auch grundsätzlich auf jene „Feinstruktur“ des Windungsschlusses, welche die individuelle Lage der jeweils betroffenen Windung im Wickelkopf zum Ausdruck bringt; das Ergebnis der folgenden Analyse darf somit nur noch den Rang eines sozusagen statistisch aufzufassenden Mittelwertes beanspruchen.

Die allgemeinen Überlegungen dieses Abschnittes zusammenfassend, ist also innerhalb der „Arbeitsräume“ der Maschine die elektrische Feldstärke E mit der magnetischen Feldstärke H durch die Maxwellschen Gleichungen des merklich leeren Raumes verknüpft. Wir modifizieren diese Aussage, indem wir den Feldträger durch ein hypothetisches Medium von verschwindend kleiner Dielektrizitätskonstante ε ersetzen

$$\varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

Da sich dann mit dem Vektor der elektrischen Induktion auch der Maxwellsche Verschiebungsstrom annulliert, breitet sich in unserem hypothetischen Medium das elektromagnetische Feld instantan aus: Mit Π_0 die sogenannte Permeabilität des leeren Raumes bezeichnend, haben wir es fortan nur noch mit quasistationären Feldern zu tun, welche innerhalb ihres Existenzbereiches den vektoriellen, partiellen Differentialgleichungen

$$\text{rot } H = 0 \quad (7)$$

$$\text{rot } E = -\Pi_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8)$$

gehorschen; zu ihnen treten die Kontinuitätsgleichungen der Elektrizität und des Magnetismus, welche sich wegen (6) auf die eine Angabe

$$\text{div } H = 0 \quad (9)$$

reduzieren.

Welche Bedingungen sind den Feldstärken E und H beziehentlich am Rande ihrer Existenzgebiete aufzuerlegen?

1. Längs aller „nackten“ Flächenelemente der ferromagnetischen Körper muß auf Grund der Annahme (1) die jeweils tangentiell gerichtete Komponente der magnetischen Feldstärke H verschwinden.

2. Die längs der Hülle der Stromleiter wirksame tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke wird von dem jeweils dort herrschenden Strombelag diktiert.

3. Auf den Flächenelementen der gemäß (2) als vollständig leitend gedachten Strombahnen bricht die tangentielle Komponente der elektrischen Feldstärke E zusammen.

Das Primärfeld

Unter dem Primärfeld (Index (p)) verstehen wir das Feld allein der Läuferströme bei dauernd verschwindendem Ständerstrom; in technischer Terminologie schildert es also den elektromagnetischen Zustand der leerlaufenden Maschine vor Eintritt des Windungsschlusses.

Im Einklang mit der üblichen Bauart synchroner Wechselstromgeneratoren des hier untersuchten Typs setzen wir die radiale Weite

$$\delta = R_2 - R_1 \quad (10)$$

des Luftspaltes als klein gegen den in (5) definierten Polbogen voraus

$$\delta = R_2 - R_1 \ll \frac{\pi R_2}{p} = \tau. \quad (11)$$

Seien gleichzeitig die Stirnräume derart konstruiert, daß dort

$$R_3 - R_1 \gg \delta \quad (12)$$

und

$$b \gg \delta \quad (13)$$

ausfällt, so darf der Anteil der primären Stirnfelder gegen den Anteil des primären Kernfeldes vernachlässigt werden, so daß wir es fortan nur noch mit dem letztgenannten zu tun haben.

Wir setzen voraus, daß sich der Läufer relativ zum Ständer im Sinne wachsenden Azimuts mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit Ω drehe. Ergänzen wir nun das ständerfeste Bezugssystem der Zylinderkoordinaten z, r, α durch das läufergebundene System der gestrichenen Zylinderkoordinaten

$$z' = z; \quad r' = r; \quad \alpha' = \alpha - \Omega t, \quad (14)$$

in welchem die einheitliche Zeit

$$t' = t \quad (15)$$

gemessen werde, so erweisen sich die Erregerströme für einen im gestrichenen System postierten Beobachter als zeitfrei. Da sie überdies im Kerngebiet der Maschine parallel zu deren Achse geführt werden, werden sie durch die „Läuferwicklungsgleichung“

$$A_{z'}^{(p)} = A_{z'}^{(p)}(\alpha') \quad (16)$$

erschöpfend beschrieben; in ihr bezeichnet $A_{z'}^{(p)}(\alpha')$ eine reelle, notwendig eindeutige Funktion des Azimuts α' , welche der verlangten Zahl von $p \geq 1$ Polpaaren durch die Fouriersche Reihendarstellung

$$A_{z'}^{(p)}(\alpha') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(p)} e^{i p n \alpha'}; \quad i = \sqrt{-1} \quad (17)$$

angepaßt wird. Ihre Koeffizienten $a_n^{(p)}$ sind aus (16) mittels der Vorschrift

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_{z'}^{(p)}(\alpha') e^{-i p n \alpha'} d\alpha' \quad (18)$$

zu berechnen, welche nach Ersatz des „kinematischen“ Azimuts α' durch den „elektrischen“ Winkel

$$\eta' = p \alpha' \quad (19)$$

in

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{2\pi p} \int_{-p\pi}^{p\pi} A_{z'}^{(p)}\left(\frac{\eta'}{p}\right) e^{-i n \eta'} d\eta' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_{z'}^{(p)}\left(\frac{\eta'}{p}\right) e^{-i n \eta'} d\eta' \quad (20)$$

übergeht. Mit $a_n^{(p)*}$ den zu $a_n^{(p)}$ konjugiert-komplexen Wert bezeichnend, folgt aus der Realität der Funktion $A_{z'}^{(p)}(\alpha')$ die duale Relation

$$a_{-n}^{(p)} = a_n^{(p)*}. \quad (21)$$

Überdies unterwerfen wir das System der Erregerströme der „Vollständigkeitsbedingung“

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_{z'}^{(p)}(\alpha') d\alpha' = 0, \quad (22)$$

welche gemäß (20) die Aussage

$$a_0^{(p)} = 0 \quad (23)$$

nach sich zieht.

Auf Grund ihrer Wirbelfreiheit kann die primäre magnetische Feldstärke $H^{(p)}$ aus einem relativ zum Läufer zeitfreien magnetischen Skalarpotential $\varphi^{(p)}$ hergeleitet werden. Unter nochmaliger Berufung auf (11) dürfen wir nun die „Randeffekte“ des Kernfeldes in der Umgebung seiner Grenzebenen $z' = \mp \frac{1}{2} l$ außer acht lassen, so daß sich, mit der hierdurch angezeigten Genauigkeit, innerhalb des Gebietes $|z'| < \frac{1}{2} l$ das Potential $\varphi^{(p)}$ auf die von z' unabhängige Funktion

$$\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(r', \alpha'); \quad -\frac{1}{2} l < z' < \frac{1}{2} l \quad (24)$$

reduziert; aus ihr berechnen sich die (physikalischen) Komponenten der magnetischen Feldstärke mittels der Differentialproportionen

$$H_{z'}^{(p)} = -\frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial z'} = 0; \quad H_{r'}^{(p)} = -\frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial r'}; \quad H_{\alpha'}^{(p)} = -\frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial \alpha'}. \quad (25)$$

Da das magnetische Feld keine Quellen besitzt, genügt $\varphi^{(p)}$ der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(p)}}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(p)}}{\partial \alpha'^2} = 0 \quad (26)$$

unter den Randbedingungen

$$-\frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial \alpha'} = A_{z'}^{(p)}(\alpha') \text{ in } r' = R_1; \quad 0 \leq \alpha' < 2\pi \quad (27)$$

und

$$-\frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial \alpha'} = 0 \text{ in } r' = R_2; \quad 0 \leq \alpha' < 2\pi. \quad (28)$$

Mit Rücksicht auf die Eigenschaft (23) des Erregersystems setzen wir das gesuchte Integral der Laplaceschen Gleichung in Gestalt der „lückenhaften“ Fourier-Reihe an

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(p)} = & \sum_{n=-\infty}^{-1} \gamma_n^{(p)} \left[\left(\frac{R_2}{r'} \right)^{pn} - \left(\frac{r'}{R_2} \right)^{pn} \right] e^{ipn\alpha'} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(p)} \left[\left(\frac{R_2}{r'} \right)^{pn} - \left(\frac{r'}{R_2} \right)^{pn} \right] e^{ipn\alpha'}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

welche die Randbedingung (28) für alle endlichen Werte der Koeffizienten $\gamma_n^{(p)}$ identisch befriedigt; diese selbst folgen somit durch Vergleich von (17) mit (27) zu

$$\gamma_n^{(p)} = -\frac{a_n^{(p)} R_2}{ipn \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{pn} - \left(\frac{r'}{R_2} \right)^{pn} \right]}; \quad n \neq 0. \quad (30)$$

Ergänzen wir diese Formeln durch die nur formale Angabe

$$\gamma_0^{(p)} = 0 \quad (31)$$

und kehren mittels der Transformation (14) zum ständerfesten Bezugssystem zurück, so finden wir also für das Primärpotential, welches von einem am Ständer fixierten Beobachter registriert wird, die nunmehr explizit von der Zeit t abhängige Darstellung

$$\varphi^{(p)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(p)} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^{pn} - \left(\frac{r}{R_2} \right)^{pn} \right] e^{ipn(\alpha - \Omega t)}. \quad (32)$$

Sie schildert das Zusammenspiel abzählbar-unendlich vieler Drehfelder, welche sämtlich mit der einheitlichen, gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit Ω im mathematisch-positiven Sinne umlaufen; insbesondere entnehmen wir ihr die (physikalische) Radialkomponente der primären magnetischen Ständerinduktion zu

$$\Pi [H r^{(p)}]_{r=R_2} = - \Pi \cdot \left[\frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial r} \right]_{r=R_2} = i \Pi \cdot \frac{2}{R_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(p)} p n e^{ipn(\alpha - \Omega t)}. \quad (33)$$

Nun dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Meridianebene $\alpha = 0$ des ständerfesten Bezugssystems mit der Symmetrieebene der kranken Windung identifizieren; diese umfaßt somit den primären magnetischen Induktionsfluß

$$\Phi^{(p)} = \Pi \cdot l \cdot R_2 \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} [H r^{(p)}]_{r=R_2} \cdot d\alpha = i \Pi \cdot 4 l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(p)} \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) e^{-ipn\Omega t}. \quad (34)$$

Hiernach annullieren sich alle harmonischen Flußkomponenten gerader, positiver oder negativer Ordnungszahlen n mit Einschluß der Null. Allerdings ist diese Angabe für alle $n \leq 0$ auf die „gemittelte“ Ständerwindung der geometrischen Eigenschaft (5) beschränkt, während jede Windung, welche von dieser Norm abweicht, im allgemeinen auch geradzahlig-harmonische Flußkomponenten umfassen wird; da wir jedoch diese „Feinstruktur“ nach Übereinkunft außer acht lassen, reduziert sich (34) mit Rücksicht auf (21) und (30) zu

$$\Phi^{(p)} = i \Pi \cdot 4 l \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [\gamma_{2m+1}^{(p)} e^{-ip(2m+1)\Omega t} - \gamma_{2m+1}^{(p)*} e^{ip(2m+1)\Omega t}]. \quad (35)$$

Falls man insbesondere den Läuferstrombelag der Symmetrieeigenschaft

$$A_z^{(p)}(\alpha') = A_z^{(p)}(-\alpha') \quad (36)$$

unterwirft, folgt aus (20) und (21) die Aussage

$$a_{2m+1}^{(p)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_z^{(p)} \left(\frac{\eta'}{p} \right) \cos(2m+1)\eta' \cdot d\eta' = a_{2m+1}^{(p)*}. \quad (37)$$

Da diese Relation vermöge (30) und (31) die Gleichheit

$$\gamma_{2m+1}^{(p)} = \gamma_{2m+1}^{(p)*} \quad (38)$$

nach sich zieht, vereinfacht sich (35) zu

$$\Phi^{(p)} = \Pi \cdot 8 l \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \gamma_{2m+1}^{(p)} \sin p(2m+1)\Omega t. \quad (39)$$

Zu (35) zurückkehrend, setze man

$$F_{2m+1}^{(p)} = II \cdot 8l \cdot (-1)^m \sqrt{\gamma_{2m+1}^{(p)} \cdot \gamma_{2m+1}^{(p)*}} \quad (40)$$

sowie

$$\chi_{2m+1}^{(p)} = \arctg \frac{1}{i} \frac{\gamma_{2m+1}^{(p)} - \gamma_{2m+1}^{(p)*}}{\gamma_{2m+1}^{(p)} + \gamma_{2m+1}^{(p)*}}. \quad (41)$$

Führt man dann mittels der Relation

$$\omega = p \Omega \quad (42)$$

die Grundfrequenz ω der periodischen Flußschwankungen ein, welche zufolge ihres starren Verhältnisses zur mechanischen Winkelgeschwindigkeit Ω des Läufers die Synchronmaschine als solche definiert, so wird also der primäre Induktionsfluß der kranken Windung durch die Fouriersche Reihe

$$\Phi^{(p)} = \sum_{m=0}^{\infty} F_{2m+1}^{(p)} \sin \{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \} \quad (43)$$

dargestellt; nachdem ihre Konstanten im vorstehenden auf die Geometrie des Maschinenkernes und die elektrischen Daten des Erregerstromsystems zurückgeführt wurden, gelten sie fortan als bekannt.

Entstehung des Sekundärfeldes

Auf Grund seiner zeitlichen Veränderungen erzwingt der magnetische Primärfluß $\Phi^{(p)} = \Phi^{(p)}(t)$ längs der vektoriellen Linienelemente ds der ihn umfassenden Windung die primäre elektrische Umlaufspannung

$$U_{\odot}^{(p)} = \oint (E^{(p)} ds) = - \frac{d\Phi^{(p)}}{dt}. \quad (44)$$

Da wir jedoch die (ideelle) Ohmsche Leitfähigkeit aller Strombahnen als unbegrenzt hoch vorausgesetzt haben, vernichtet der Kurzschluß jener Windung ihre resultierende elektrische Umlaufspannung: die kranke Windung wird zum Träger eines Kurzschlußstromes J , dessen magnetisches Zusatzfeld also vermöge der induktiven Wirkung seines Flusses die primäre elektrische Umlaufspannung genau zu kompensieren hat; es definiert das Sekundärfeld (Index $^{(s)}$), welches sich wegen der Linearität der Feldgleichungen dem Primärfeld ohne gegenseitige Störung überlagert. Mit dem Symbol $U_{\odot}$ die resultierende Umlaufspannung bezeichnend, erfassen wir somit die Genetik des magnetischen Sekundärfeldes formal in der Differentialgleichung

$$U_{\odot} = U_{\odot}^{(p)} + U_{\odot}^{(s)} = \oint \{ (E^{(p)} + E^{(s)}) ds \} = - \left\{ \frac{d\Phi^{(p)}}{dt} + \frac{d\Phi^{(s)}}{dt} \right\} = 0. \quad (45)$$

Bei ihrer Integration beschränken wir uns auf jenen „Dauerzustand“, welchem das System nach Ablauf der im Kurzschlußzeitpunkt $t=0$ beginnenden Ausgleichvorgänge in der Grenze $t \rightarrow \infty$ zustrebt. Die frühere Annahme unendlich hoher Ohmscher Leitfähigkeit der Strombahnen zur Voraussetzung eines zwar infinitesimal kleinen, doch gewiß nicht verschwindenden Widerstandes abschwächend, befriedigen wir (45) durch die vom Anfangszustande unabhängige Partikularlösung

$$\Phi^{(p)} + \Phi^{(s)} = 0, \quad (46)$$

welche somit in jedem Augenblick die Kompensation des primären magnetischen Induktionsflusses durch den sekundären verlangt. Schreiben wir

$$F_{2m+1}^{(s)} = -F_{2m+1}^{(p)}, \quad (47)$$

so folgt daher als (43), (46) und (47) für den sekundären Fluß der periodische Verlauf

$$\Phi^{(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} F_{2m+1}^{(s)} \sin \{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \}. \quad (48)$$

Unter abermaliger Berufung auf die Linearität der Feldgleichungen setzen wir hiernach den Dauerkurzschlußstrom $J = J(t)$ in Gestalt der Fourierschen Reihe

$$J(t) = \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1} \cdot \sin \{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \} \quad (49)$$

an, deren zeitfreie Koeffizienten J_{2m+1} die harmonischen Stromamplituden beziehentlich der Ordnungszahl $(2m+1)$ schildern; diese sind ihrerseits mit den je gleichnamigen Amplituden $F_{2m+1}^{(s)}$ des Sekundärflusses durch die linearen Gleichungen

$$F_{2m+1}^{(s)} = L_{2m+1} J_{2m+1} \quad (50)$$

verknüpft, in welchen die Konstanten L_{2m+1} das System der Induktivitäten $(2m+1)$ -ster Ordnung der kurzgeschlossenen Windung definieren. Bei der expliziten Berechnung dieser Induktivitäten hat man das sekundäre, vom Kurzschlußstrom erregte Magnetfeld auf Grund der Struktur unseres Maschinenmodells in zwei Anteile aufzuspalten, innerhalb deren sich wesentlich voneinander verschiedene physikalische Vorgänge abspielen:

1. Das Sekundärfeld des Kerngebietes ist mit der Läuferwicklung induktiv verkettet.
2. Das Sekundärfeld der Stirngebiete entwickelt sich merklich unabhängig von den Vorgängen im Läufer.

Ungeachtet dieser qualitativ für alle harmonischen Teilfelder einheitlichen elektrodynamischen Eigenschaften haben wir deren quantitative Beschreibung für jede Ordnungszahl $(2m+1)$ getrennt durchzuführen.

Das sekundäre Kernfeld

Auf Grund der Konstruktionsvorschrift (11) offenbart das sekundäre Kernfeld in allen Ebenen $z = \text{const.}$ seines Existenzgebietes $|z| < \frac{1}{2} l$ merklich die nämliche Struktur. Um allerdings diese vorerst recht verschwommene Aussage zur Grundlage einer exakten mathematischen Analyse zu machen, haben wir uns eines Kunstgriffes zu bedienen. Das Kerngebiet werde gedanklich aus der Maschine gelöst; seine Flanken mögen nunmehr mit je einer elektrisch vollkommen leitenden Kreisscheibe ausgerüstet werden, welche ihrerseits beziehentlich mit den dort endenden Ständernutenleitern der kurzgeschlossenen Windung, doch nur mit diesen, galvanisch verbunden ist. In diesen flächenhaften Zusatzleitern entwickeln sich dann elektrische Ströme von genau solcher Verteilung und Stärke, daß das magnetische Sekundärfeld außerhalb des Kerngebietes identisch verschwindet, während es innerhalb des Kerngebietes, wie verlangt, unabhängig von der Lage der jeweils gewählten Kontrollebene $z = \text{const.}$ ausfällt; überdies ergänzen erst jene Flächenströme die beiden, innerhalb allein des Ständers ja zunächst „offenen“ Stromstücke zu dem in sich geschlossenen Stromkreis, welchen das Erste Kirchhoffsche Gesetz als Existenzbedingung eines jeden quasi-stationären magnetischen Feldes verlangt. Zur expliziten Berechnung des nunmehr als physikalisch realisierbar erwiesenen Kernfeldes bilden wir das zweidimensionale Ringgebiet

$$R_1 < r < R_2; \quad -\pi < \alpha < \pi \quad (51)$$

einer individuellen Kontrollebene $z = \text{const.}$ des Bereiches $|z| < \frac{1}{2} l$ mittels der komplexen Transformation

$$x + iy = i R_2 \ln \frac{R_2}{r e'^{\alpha}} \quad (52)$$

($i = \sqrt{-1}$) konform auf eines der abzählbar unendlich vielen kongruenten Rechtecke

$$\left. \begin{aligned} -p\tau &\equiv -R_2\pi < x < R_2\pi \equiv p\tau \quad \text{mod } 2p\tau \\ 0 < y < d &\equiv R_2 \ln \frac{1}{1 - \frac{\delta}{R_2}} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

ab, welche nach Abb. 3 in der Ebene der orthogonalen Koordinaten (x, y) aufgespannt werden. In dieser wird der vollkommen permeable Ständer der Maschine durch das

Halbgebiet $y < 0$ und ihr gleichfalls vollkommen permeabler Läufer durch das Halbgebiet $y > d$ geometrisch repräsentiert; für die Weite d des transformierten Luftspaltes liefert (53) die Grenzaussage

$$\lim d = \delta, \quad \frac{R_2}{5} \rightarrow \infty, \quad (54)$$

welche es häufig gestattet, in praktisch ausreichender Genauigkeit den wahren Luftspalt δ mit dem transformierten zu vertauschen.

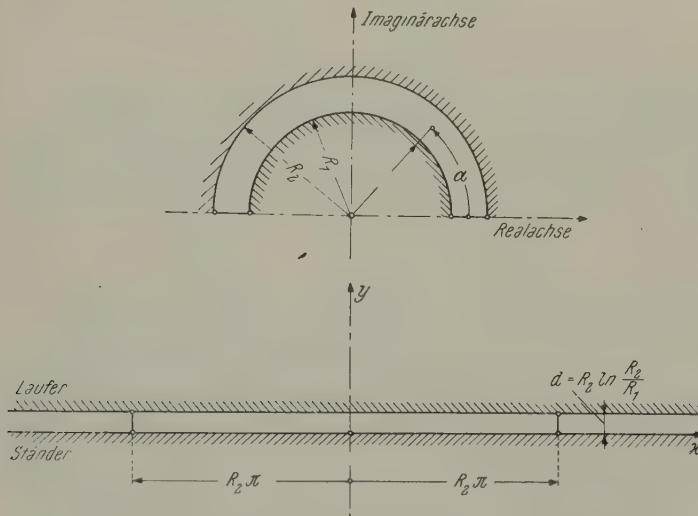


Abb. 3. Konforme Abbildung des Kerngebietes

Um uns weiterhin von der jeweils gewählten Form der Ständernuten und der mehr oder minder zufälligen Lage des gerade kurzgeschlossenen Leiters innerhalb seiner Wohnnut zu befreien, ersetzen wir ihn durch ein vollkommen leitendes, infinitesimal dünnes Band von der Breite v der Nutenöffnung, welches nach Abb. 4 auf der glatt gedachten Ständeroberfläche derart befestigt ist, daß seine Achse mit dem Zentrum der wahren Nutenöffnung koinzidiert; wir ergänzen diese geometrischen Angaben der Kurzschlußbahn durch die Annahme ihres ja gleichförmig über die Bandbreite verteilten „sekundären“ Strombelages $A^{(s)}$ nach Abb. 5, dessen Augenblickswerte $A^{(s)}(t)$ also immer aus dem gleichzeitigen Kurzschlußstrom $J(t)$ mittels der Relationen

$$A^{(s)}(t) = \pm \frac{1}{v} J(t) \quad \text{für} \quad \pm \frac{\tau + v}{2} \geq x \geq \pm \frac{\tau - v}{2} \quad \text{mod } 2p\tau \quad (55)$$

hervorgehen.

Um von der nichtanalytischen Darstellung (55) zu einer analytischen zu gelangen, welche als solche für alle x gültig ist, richten wir unser Augenmerk vorerst lediglich auf die Gesamtheit der „positiven“, in $x = +\frac{\tau}{2} \text{ mod } 2p\tau$ zentrierten Bänder; ihren Strombelag der Deutlichkeit halber durch das Symbol $A^{(s)+}(t, x)$ bezeichnend, stellen wir ihn durch die Fouriersche Reihe

$$A^{(s)}(t, x) = \frac{1}{v} J(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(s)+} e^{in \frac{\pi x}{p\tau}} \quad (56)$$

dar, deren Koeffizienten $a_n^{(s)+}$ sich aus (55) durch Integration längs $(-p\tau) < x < p\tau$ zu

$$a_n^{(s)+} = \frac{1}{2p\tau} \int_{\frac{\tau-v}{2}}^{\frac{\tau+v}{2}} e^{-in \frac{\pi x}{p\tau}} dx = \frac{e^{-in \frac{\pi}{2p}}}{2p\tau} \cdot v \cdot \frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \quad (57)$$

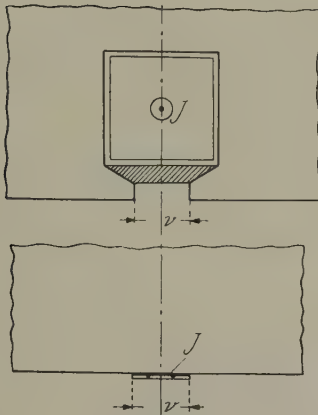


Abb. 4. Ersatz des Nutenleiters durch ein Stromband am glatt gedachten Ständer

berechnen. Auf dem gleichen Wege finden wir für den Strombelag $A^{(s)-}(t, x)$ der in $x = -\frac{\tau}{2} \bmod 2p\tau$ zentrierten „negativen“ Bänder die Fouriersche Reihe

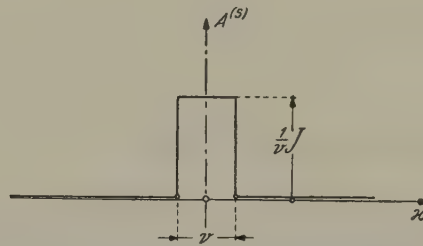


Abb. 5. Räumliche Verteilung des Strombelages längs des Ständerumfanges

$$A^{(s)-}(t, x) = -\frac{1}{v} J(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(s)-} e^{in \frac{\pi x}{p\tau}} \quad (58)$$

mit

$$a_n^{(s)-} = \frac{e^{in \frac{\pi}{2p}}}{2p\tau} \cdot v \cdot \frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \quad (59)$$

Aus (56) und (58) resultiert die gesuchte analytische Darstellung des sekundären Gesamtstrombelages

$$A^{(s)}(x, t) = A^{(s)+}(x, t) + A^{(s)-}(x, t) = \frac{J(t)}{p\tau} \cdot \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \sin \frac{n\pi}{2p} e^{in \frac{\pi x}{p\tau}}, \quad (60)$$

so daß sich also die (räumlichen) Teilfelder der Ordnungszahlen

$$n = \dots -4p; -2p; 0; 2p; 4p; \dots \quad (61)$$

annullieren; ungeachtet dieses Tatbestandes bleiben wir aus formalen Gründen vorerst bei der allgemeinen Darstellung (60) stehen. Übertragen wir dann die zeitliche Spektralanalyse (49) des Kurzschlußstromes mittels des Ansatzes

$$A^{(s)}(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{(s)}(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{(s)}(x) \cdot \sin \{(2m+1)\omega t - \chi_{2m+1}^{(p)}\} \quad (62)$$

auf den Strombelag, so folgt aus (60) für dessen zeitlich harmonische Komponente der Ordnungszahl $(2m+1)$ die räumliche Fourierzerlegung

$$A_{2m+1}^{(s)}(x, t) = \frac{J_{2m+1}}{p\tau} \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \sin \frac{n\pi}{2p} e^{in \frac{\pi x}{p\tau}} \sin \{(2m+1)\omega t - \chi_{2m+1}^{(p)}\}, \quad (63)$$

welche wir auf zwei unterschiedlichen Wegen kinematisch deuten:

1. Jeder Posten der Summe (63) repräsentiert eine (komplexe) stehende Welle oder, anders ausgedrückt, die Summe zweier reeller, stehender Wellen je der Länge

$$\lambda_n = \frac{1}{n} 2p\tau = \frac{1}{n} 2\pi R_2. \quad (64)$$

2. Die Funktion $\sin \{(2m+1)\omega t - \chi_{2m+1}^{(p)}\}$ in ihre konjugiert-komplexen Komponenten aufspaltend, finden wir zunächst

$$A_{2m+1}^{(s)}(x, t) = \frac{J_{2m+1}}{2p\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \sin \frac{\pi x}{2p} \left\{ e^{i \left[n \frac{\pi x}{p\tau} - (2m+1)\omega t + \chi_{2m+1}^{(p)} \right]} - e^{i \left[n \frac{\pi x}{p\tau} + (2m+1)\omega t + \chi_{2m+1}^{(p)} \right]} \right\}, \quad (65)$$

und wenn wir nun je zwei Posten der Ordnungszahlen $(\pm n)$ paarweise zusammenfassen

$$A_{2m+1}^{(s)}(x, t) = \frac{J_{2m+1}}{p\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \sin \frac{n\pi}{2p} \cos \left\{ n \frac{n\pi}{p\tau} - (2m+1)\omega t + \chi_{2m+1}^{(p)} \right\}. \quad (66)$$

Hier beschreibt jedes Reihenglied ein (reelles) Drehfeld beziehentlich der Phasengeschwindigkeit

$$v_{2m+1, n} = \frac{q\tau}{\pi} \frac{2m+1}{n} \omega = \frac{\tau}{\pi} \frac{2m+1}{n} \Omega = R_2 \Omega \frac{p(2m+1)}{n}. \quad (67)$$

Obwohl die beiden in Parallele gesetzten Auffassungen aus einer mathematischen Identität hervorgehen und daher einander völlig gleichwertig sind, bevorzugen wir aus physikalischen Gründen zunächst die letztgenannte, welche zu einer fundamentalen Klassifizierung der von ihr beschriebenen Komponenten-Drehfelder führt:

1. Genügt die Ordnungszahl n der Auswahlregel

$$n = p(2m+1) \equiv n_s, \quad (68)$$

so resultiert aus (67) die Phasengeschwindigkeit

$$v_{2m+1, n_s} = R_2 \Omega, \quad (69)$$

welche genau mit der Wandergeschwindigkeit des Primärfeldes längs des in die x - y -Ebene transformierten Ständerumfanges übereinstimmt: Die entsprechende Drehfeldkomponente des Sekundärfeldes definiert dessen Synchronanteil, der als solcher relativ zum Läufer ruht; durch das Zeichen n_s haben wir diesen Sachverhalt vorgreifend symbolisiert.

2. Allen Ordnungszahlen n , welche der Ungleichung

$$n \neq n_s \quad (70)$$

unterworfen sind, korrespondieren asynchrone Drehfeldkomponenten, welche sich relativ zum Läufer bewegen.

Wir fragen nach der Struktur der sekundären magnetischen Drehfelder jeweils der zeitlichen Ordnungszahl $(2m+1)$ und der räumlichen Ordnungszahl n . Zu ihrer Beschreibung bedienen wir uns des magnetischen Vektorpotentials, dessen einzige, von Null verschiedene Komponente $V_{2m+1,n}^{(s)}$ parallel zur positiven Zählrichtung des Ständerstrombelages weist und in jeder Ebene $z = \text{const.}$ ihres Existenzbereiches der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 V_{2m+1,n}^{(s)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{2m+1,n}^{(s)}}{\partial y^2} = 0 \quad (71)$$

genügt; aus ihrer Lösung gehen die beziehentlich achsenparallelen Komponenten der magnetischen Feldstärke $H^{(s)}$ mittels der Differentialoperationen

$$H_x^{(s)} = \frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V_{2m+1,n}^{(s)}}{\partial y}, \quad H_y^{(s)} = -\frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V_{2m+1,n}^{(s)}}{\partial x} \quad (72)$$

hervor.

Zuerst beschäftigen wir uns mit dem synchronen Anteil des Sekundärfeldes. Nach (66) und (68) reduziert sich sein Strombelag $A_{2m+1,n_s}^{(s)}$ auf

$$A_{2m+1,n_s}^{(s)} = \frac{J_{2m+1}}{p\tau} \frac{\sin(2m+1) \frac{\pi\nu}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi\nu}{2\tau}} \sin(2m+1) \frac{\pi}{2} \cos \left\{ (2m+1) \left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t \right) + \chi_{2m+1}^{(p)} \right\}. \quad (73)$$

Da nun das Synchronfeld die Erregerwicklung des Läufers nicht zu induzieren vermag, muß gemäß (1) die Tangentialkomponente der zugehörigen magnetischen Feldstärke längs des Läuferumfanges verschwinden: Das Vektorpotential $V_{2m+1,n_s}^{(s)}$ unterliegt den Randbedingungen

$$\frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V_{2m+1,n_s}^{(s)}}{\partial y} = -A_{2m+1,n_s}^{(s)} \quad \text{für } y=0 \quad (74)$$

und

$$\frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V_{2m+1,n_s}^{(s)}}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y=d. \quad (75)$$

Um zunächst (75) zu befriedigen, integrieren wir die Laplacesche Gleichung nach Wahl einer vorerst noch beliebigen Konstanten $C_{2m+1,n_s}^{(s)}$ durch die Funktion

$$V_{2m+1,n_s}^{(s)} = C_{2m+1,n_s}^{(s)} \cos \left\{ (2m+1) \left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t \right) + \chi_{2m+1}^{(p)} \right\} \cosh(2m+1) \frac{\pi(d-y)}{\tau}. \quad (76)$$

Aus (73) und (74) folgt dann die Angabe

$$C_{2m+1,n_s}^{(s)} = \Pi_0 \frac{J_{2m+1}}{p\tau} \frac{\sin(2m+1) \frac{\pi\nu}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi\nu}{2\tau}} \sin(2m+1) \frac{\pi}{2} \frac{\tau}{\pi(2m+1) \sinh(2m+1) \frac{\pi d}{\tau}}, \quad (77)$$

mit welcher das gesuchte Magnetfeld nunmehr bekannt ist.

Wir gehen zur Gesamtheit der asynchronen Sekundärdrehfelder über, welche je mit dem Ständerstrombelag

$$A_{2m+1,n_s}^{(s)} = \frac{J_{2m+1}}{p\tau} \frac{\sin n \frac{\pi\nu}{2p\tau}}{n \frac{\pi\nu}{2p\tau}} \sin \frac{n\pi}{2p} \cos \left\{ n \frac{\pi x}{p\tau} - (2m+1) \omega t + \chi_{2m+1}^{(p)} \right\} \quad (78)$$

genetisch verknüpft sind. Daher unterliegt das Vektorpotential $V_{2m+1,n}^{(s)}$ dieses Drehfeldes in Analogie zu (74) der Ständerrandbedingung

$$\frac{1}{H_0} \frac{\partial V_{2m+1,n}^{(s)}}{\partial y} = -A_{2m+1,n}^{(s)} \quad \text{für } y=0. \quad (79)$$

Im Gegensatz zur Passivität der synchronen Sekundärfelder relativ zum Läufer rufen jedoch die asynchronen Felder vermöge ihrer Schlupfbewegung in der Erregerwicklung zusätzliche Ströme hervor. Da nun gemäß (2) das elektrische Feld an der Läuferoberfläche durch die Erregerstrombahnen vernichtet wird, muß ebendort auch seine Ursache, die normal zur Läuferoberfläche weisende Komponente der magnetischen Induktion, verschwinden: Im Hinblick auf (72) ist $V_{2m+1,n}^{(s)}$ der Läufer-randbedingung

$$\frac{1}{H_0} \frac{\partial V_{2m+1,n}^{(s)}}{\partial x} = 0 \quad \text{für } y=d \quad (80)$$

zu unterwerfen, welche sich von (75) wesentlich unterscheidet.

Um zunächst (80) zu befriedigen, integrieren wir die Laplacesche Gleichung durch die Funktion

$$V_{2m+1,n}^{(s)} = C_{2m+1,n}^{(s)} \cos \left\{ n \frac{\pi x}{p \tau} - (2m+1) \omega t + \chi_{2m+1}^{(p)} \right\} \sinh n \frac{\pi (d-y)}{p \tau}, \quad (81)$$

für deren amplitudenbestimmenden Faktor $C_{2m+1,n}^{(s)}$ aus (78) und (79) die Angabe

$$C_{2m+1,n}^{(s)} = H_0 \frac{J_{2m+1}}{p \tau} \frac{\sin n \frac{\pi v}{2 p \tau}}{n \frac{\pi v}{2 p \tau}} \sin \frac{n \pi}{2 p} \frac{p \tau}{\pi n \cosh n \frac{\pi d}{p \tau}} \quad (82)$$

resultiert; mit ihr sind somit auch alle asynchronen Drehfeldkomponenten des Sekundärfeldes bekannt.

Wir ergänzen die vorstehende Analyse des sekundären magnetischen Feldes durch die Berechnung seiner (Freien) magnetischen Energie W , die wir in folgenden Schritten durchführen:

1. Die Energie $W_{2m+1,n_s}^{(s)}$ des synchronen Drehfeldes der Ordnungszahlen $(2m+1; n_s)$ besitzt den zeitfreien Wert

$$\left. \begin{aligned} W_{2m+1,n_s}^{(s)} &= \frac{1}{2} \int_{-p\tau}^{p\tau} A_{2m+1,n_s}^{(s)} \{V_{2m+1,n_s}^{(s)}\}_{y=0} l \cdot dx = \\ &= \frac{H_0}{2} J_{2m+1}^2 \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi p (2m+1)} \operatorname{cotgh} (2m+1) \frac{\pi d}{\tau} . \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

2. Das asynchrone Drehfeld der Ordnungszahlen $(2m+1; \mp n_s)$ enthält die gleichfalls konstante Energie

$$\left. \begin{aligned} W_{2m+1,n}^{(s)} &= \frac{1}{2} \int_{-p\tau}^{p\tau} A_{2m+1,n}^{(s)} \{V_{2m+1,n}^{(s)}\}_{y=0} l \cdot dx = \\ &= \frac{H_0}{2} J_{2m+1}^2 \left[\frac{\sin n \frac{\pi v}{2 p \tau}}{n \frac{\pi v}{2 p \tau}} \sin \frac{n \pi}{2 p} \right]^2 \frac{l}{\pi n} \operatorname{tgh} n \frac{\pi d}{p \tau} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

und insbesondere für die räumliche Ordnungszahl $n = -n_s$

$$\left. \begin{aligned} W_{2m+1, -n_s}^{(s)} &= \frac{H_0 J_{2m+1}^2}{2} \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi p (2m+1)} \operatorname{tgh}(2m+1) \frac{\pi d}{\tau} = \\ &= W_{2m+1, n_s}^{(s)} \operatorname{tgh}^2(2m+1) \frac{\pi d}{\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

3. Wir bilden die wechselseitige Energie $W_{2m+1, \pm n}^{(s)}$ des Strombelages $A_{2m+1, +n}^{(s)}$ mit dem am Ständerumfange gemessenen Vektorpotential $V_{2m+1, -n}^{(s)}$, also den Integralausdruck

$$W_{2m+1, \pm n}^{(s)} = \frac{1}{2} \int_{-p\tau}^{p\tau} A_{2m+1, +n}^{(s)} \{V_{2m+1, -n}^{(s)}\}_{y=0} l \cdot dx, \quad (86)$$

für welchen genau in folgenden Fällen ein zeitabhängiger, von Null verschiedener Wert resultiert:

α) Bei der Wahl $n = n_s$ findet man mit Rücksicht auf (73), (81) und (82)

$$\left. \begin{aligned} W_{2m+1, \pm n_s}^{(s)} &= -\frac{H_0 J_{2m+1}^2}{2} \frac{1}{p\tau} \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi p (2m+1)} \operatorname{tgh}(2m+1) \frac{\pi d}{\tau} \cdot \\ &\cdot \int_{-p\tau}^{p\tau} \cos \left\{ (2m+1) \left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t \right) + \chi_{2m+1}^{(p)} \right\} \cos \left\{ (2m+1) \left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t \right) - \chi_{2m+1}^{(p)} \right\} dx = \\ &= -\frac{H_0 J_{2m+1}^2}{2} \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi p (2m+1)} \operatorname{tgh}(2m+1) \frac{\pi d}{\tau} \cos 2 \left\{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

β) Sei $n = -n_s$, so entsteht im Hinblick auf (76), (77) und (78)

$$\left. \begin{aligned} W_{2m+1, \mp n_s}^{(s)} &= -\frac{H_0 J_{2m+1}^2}{2} \frac{1}{p\tau} \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi p (2m+1)} \operatorname{cotgh}(2m+1) \frac{\pi d}{\tau} \cdot \\ &\cdot \int_{-p\tau}^{p\tau} \cos \left\{ (2m+1) \left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t \right) - \chi_{2m+1}^{(p)} \right\} \cos \left\{ (2m+1) \left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t \right) + \chi_{2m+1}^{(p)} \right\} dx = \\ &= -\frac{H_0 J_{2m+1}^2}{2} \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi p (2m+1)} \operatorname{cotgh}(2m+1) \frac{\pi d}{\tau} \cos 2 \left\{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

γ) Für $n \neq \pm n_s$ erhält man mit Hilfe von (78), (81) und (82)

$$\left. \begin{aligned} W_{2m+1, \pm n}^{(s)} &= W_{2m+1, \mp n}^{(s)} = -\frac{H_0 J_{2m+1}^2}{2} \frac{1}{p\tau} \left[\frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \sin \frac{n\pi}{2p} \right]^2 \frac{l}{\pi n} \operatorname{tgh} n \frac{\pi d}{p\tau} \cdot \\ &\cdot \int_{-p\tau}^{p\tau} \cos \left\{ n \frac{\pi x}{p\tau} - (2m+1) \omega t + \chi_{2m+1}^{(p)} \right\} \cos \left\{ n \frac{\pi x}{p\tau} + (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \right\} dx = \\ &= -\frac{H_0 J_{2m+1}^2}{2} \left[\frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \sin \frac{n\pi}{2p} \right]^2 \frac{l}{\pi n} \operatorname{tgh} n \frac{\pi d}{p\tau} \cos 2 \left\{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Wir fassen zusammen:

1. Die Freie Gesamtenergie $W_{2m+1, |n_s|}^{(s)}$ aller Felder der räumlichen Ordnungszahlen $n = \pm n_s$ erreicht die Größe

$$\left. \begin{aligned} W_{2m+1, |n_s|}^{(s)} &= W_{2m+1, |n_s|}^{(s)} + W_{2m+1, -n_s}^{(s)} + W_{2m+1, \pm n_s}^{(s)} + W_{2m+1, \mp n_s}^{(s)} = \\ &= \frac{\Pi_0}{2} J_{2m+1}^2 \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi \nu}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi \nu}{2\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi p (2m+1)} \left[\operatorname{tgh}(2m+1) \frac{\pi d}{\tau} + \operatorname{cotgh}(2m+1) \frac{\pi d}{\tau} \right] \cdot \\ &\cdot 2 \sin^2 \{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

2. Die Freie Gesamtenergie $W_{2m+1, |n|}^{(s)}$ aller Felder je der Ordnungszahlen $\pm n \neq \pm n_s$ gleicht dem Werte

$$\left. \begin{aligned} W_{2m+1, |n|}^{(s)} &= W_{2m+1, n}^{(s)} + W_{2m+1, -n}^{(s)} + W_{2m+1, \pm n}^{(s)} + W_{2m+1, \mp n}^{(s)} = \\ &= \frac{\Pi_0}{2} J_{2m+1}^2 \left[\frac{\sin n \frac{\pi \nu}{2p\tau} \sin \frac{n\pi}{2p}}{n \frac{\pi \nu}{2p\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi n} 2 \operatorname{tgh} n \frac{\pi d}{p\tau} 2 \sin^2 \{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \}. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

3. Als Freie (asynchrone) Quasienergie $W_{2m+1, |n_s|}^{(s)*}$ aller Felder der Ordnungszahlen $|n_s|$ bezeichnen wir den aus (91) durch den formalen Prozeß $n \rightarrow n_s$ hervorgehenden Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} W_{2m+1, |n_s|}^{(s)*} &= W_{2m+1, |n| \rightarrow n_s}^{(s)} = \frac{\Pi_0}{2} J_{2m+1}^2 \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi \nu}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi \nu}{2\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi p (2m+1)} 2 \operatorname{tgh}(2m+1) \frac{\pi d}{\tau} \cdot \\ &\cdot 2 \sin^2 \{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \}. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Die durch (90) gegebene, wahre Energie dieser Felder übertrifft somit die Quasienergie um das Maß

$$\left. \begin{aligned} \Delta W_{2m+1, |n_s|}^{(s)} &= W_{2m+1, |n_s|}^{(s)} - W_{2m+1, |n_s|}^{(s)*} = \\ &= \frac{\Pi_0}{2} J_{2m+1}^2 \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi \nu}{2\tau}}{(2m+1) \frac{\pi \nu}{2\tau}} \right]^2 \frac{l}{\pi p (2m+1)} \frac{2}{\sinh(2m+1) \frac{2\pi d}{\tau}} 2 \sin^2 \{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \}. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

4. Durch Summation über alle räumlichen Ordnungszahlen $(-\infty) < n < \infty$ finden wir die Freie Energie $W_{2m+1}^{(s)}$, welche mit der $(2m+1)$ -sten zeitlichen Fourierkomponente des Kurzschlußstromes gekoppelt ist, zu

$$W_{2m+1}^{(s)} = \Delta W_{2m+1, |n_s|}^{(s)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{2m+1, |n|}^{(s)}. \quad (94)$$

Nun ist der Anteil $L_{2m+1}^{(K)}$ der Induktivität L_{2m+1} , welcher auf das Kerngebiet der Maschine entfällt, im Lichte des Ansatzes (49) energetisch durch die Gleichung

$$W_{2m+1}^{(s)} = \frac{1}{2} L_{2m+1}^{(K)} J_{2m+1}^2 \sin^2 \{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \} \quad (95)$$

definiert. Mit Rücksicht auf (91) und (93) resultiert somit für $L_{2m+1}^{(K)}$ die Formel

$$L_{2m+1}^{(k)} = \Pi_0 l \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\left[\sin(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau} \right]^2}{(2m+1) \frac{\pi v}{2\tau}} \frac{1}{p(2m+1) \sinh(2m+1) \frac{2\pi d}{\tau}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \sin \frac{n\pi}{2p} \right]^2 \frac{1}{n} \operatorname{tgh} n \frac{\pi d}{p\tau} \right\}. \quad (96)$$

Obwohl wir mit ihr bezüglich der Kenntnis des sekundären Kernfeldes formal unser Ziel erreicht haben, konvergiert doch die auftretende Reihe in der Regel so langsam, daß sie für praktische, numerische Rechnungen ungeeignet ist; wir müssen daher nach Wegen Umschau halten, welche uns zu einem hinreichend genauen Näherungswerte jener Reihensumme verhelfen.

Wir setzen abkürzend

$$J_{2m+1}(t) = J_{2m+1} \sin \{ (2m+1) \omega t - \chi_{2m+1}^{(p)} \}. \quad (97)$$

Im Lichte der Definition (93) schildert dann die Differenz

$$W_{2m+1}^{(s)} - \Delta W_{2m+1, |n_s|}^{(s)} = \Pi_0 \frac{l}{2} J_{2m+1}^2(t) \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin n \frac{\pi v}{2p\tau}}{n \frac{\pi v}{2p\tau}} \sin \frac{n\pi}{2p} \right]^2 \frac{1}{n} \operatorname{tgh} n \frac{\pi d}{p\tau} \quad (98)$$

die Freie Energie eines magnetischen Feldes der zeitlichen Ordnungszahl $(2m+1)$, dessen normal zur Läuferoberfläche weisende Induktionskomponente ebendort verschwindet. Gemäß (72) ist daher sein Vektorpotential $V_{2m+1}^{(s)}$ mit dem erzeugenden Strombelage $A_{2m+1}^{(s)}(x, t)$ durch die Ständerrandbedingung

$$\frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V_{2m+1}^{(s)}}{\partial y} = -A_{2m+1}^{(s)}(x, t) \quad \text{für } y=0 \quad (99)$$

verbunden, während am Läufer

$$\frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V_{2m+1}^{(s)}}{\partial x} = 0 \quad \text{für } y=d \quad (100)$$

gefordert wird.

Aus technologischen Gründen bleibt die Nutöffnung v stets schmal im Vergleich zur Polteilung τ

$$v \ll \tau. \quad (101)$$

Wir verschärfen diese Ungleichung vorübergehend zu der Grenzvorschrift

$$\frac{v}{\tau} \rightarrow 0, \quad (102)$$

welche die früher in $x = \pm \frac{\tau}{2} \bmod 2p\tau$ zentrierten Strombänder beziehentlich der Durchflutungen $\pm J_{2m+1}(t)$ in zwei ebendort liegende Wirbellinien der nämlichen Intensitäten überführt.

Die mittels dieser Angaben im Verein mit der Laplaceschen Gleichung bestimmte Aufgabe der Potentialtheorie läßt sich mittels der Thomsonschen Bildermethode auf das Magnetfeld eines „eisenfreien“ Systems zurückführen. Im Anschluß an Abb. 6 schildern wir zunächst die Wirkung der Ständeroberfläche, indem wir, nach Ersatz des vollkommen permeablen Halbraumes $y < 0$ durch einen gleich gelegenen der Permeabilität $\mu = 1$, die Durchflutung beziehentlich jedes in der Ebene $y=0$

und der Gesamtheit der Wirbel $[+2J(t)]$ an den Orten

$$x_{-}^{\pm} = -\frac{\tau}{2} \bmod 2p\tau; \quad y_{-}^{\pm} = 2d \bmod 4d. \quad (106)$$

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem positiven System und gehen durch die Paralleltransformation

$$\xi = x - \frac{\tau}{2}; \quad \eta = y \quad (107)$$

zu den im Wirbelfaden $+J(t)$ zentrierten Koordinaten (ξ, η) über, welche wir zu der komplexen Gaußschen Koordinate

$$\zeta = \xi + i\eta \quad (108)$$

zusammenfassen. In ihrer Ebene ergänzen wir die aus dem sekundären Teil-Vektorpotential $V^{(s)+} = V^{(s)} + (\xi, \eta)$ des positiven Systems gebildete, rein imaginäre Funktion

$$i v^{+} = i v^{+}(\xi, \eta) = -\frac{i}{H_0} V^{(s)+}(\xi, \eta) \quad (109)$$

durch ihre „konjugierte“, reelle Funktion

$$u^{+} = u^{+}(\xi, \eta). \quad (110)$$

zu der komplexen, analytischen Funktion

$$\psi^{+} = \psi^{+}(\zeta) = u^{+} + i v^{+}. \quad (111)$$

Zufolge der u^{+} mit v^{+} wechselseitig verknüpfenden Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial \xi} = \frac{\partial v^{+}}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u^{+}}{\partial \eta} = -\frac{\partial v^{+}}{\partial \xi} \quad (112)$$

folgt nun aus (72), (107) und (109)

$$-\frac{\partial u^{+}}{\partial \xi} = H_x^{(s)+}; \quad -\frac{\partial u^{+}}{\partial \eta} = H_y^{(s)+}, \quad (113)$$

so daß sich u^{+} als das magnetische Skalarpotential des zu untersuchenden Feldes erweist, während v^{+} dessen Stromfunktion definiert; diese gleicht also zufolge (109) dem negativen Werte des durch H_0 geteilten Vektorpotentials.

Längs der Kontur des Rechteckes

$$A = (-p\tau, 2d); \quad B = (-p\tau, 0); \quad C = (+p\tau, 0); \quad D = (+p\tau, 2d) \quad (114)$$

nach Abb. 7 unterliegt das komplexe Potential ψ^{+} den einfachen Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \xi \leq \pm p\tau; \quad \eta = 2d \\ \xi = \pm p\tau; \quad 2d > \eta > 0 \\ \pm p\tau \geq \xi \geq 0; \quad \eta = 0 \end{aligned} \right\} u^{+} = \pm \frac{1}{2} J(t). \quad (115)$$

Um sie zu befriedigen, rufen wir die komplexe

$$q = r + i s \quad (116)$$

Ebene zu Hilfe und suchen das im mathematisch-positiven Sinne umlaufene Innere

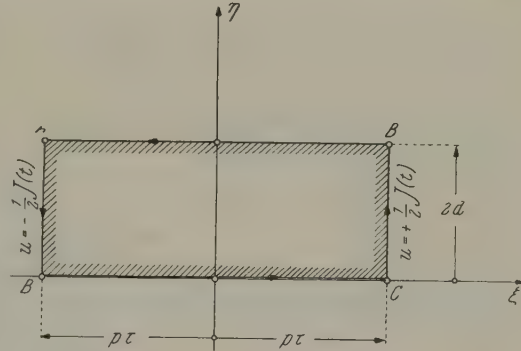


Abb. 7. Formulierung der Randbedingungen in der $\zeta = (\xi + i\eta)$ -Ebene

des in der ζ -Ebene vorgelegten Rechteckes konform auf die positiv-imaginäre q -Halbebene derart abzubilden, daß die Ecken A, B, C, D nach Wahl des vorerst noch unbekannten, reellen Moduls

$$k < 1 \quad (117)$$

gemäß Abb. 8 beziehentlich in die Punkte

$$r_A = -\frac{1}{k}; \quad r_B = -1; \quad r_C = +1; \quad r_D = +\frac{1}{k} \quad (118)$$

der r -Achse übergehen. Die gewünschte Transformation genügt der Schwarz-Christoffelschen Differentialgleichung

$$\frac{d\zeta}{dq} = C \frac{1}{\sqrt{(1-q^2)(1-k^2q^2)}}, \quad (119)$$

in welcher C eine gleichfalls vorerst unbekannte Maßstabskonstante darstellt. Durch

$$k' = \sqrt{1-k^2} \quad (120)$$

den zu k komplementären Modul einföhrnd, seien $K(k)$ und $K'(k) = K(k')$ die beziehentlich zu k und k' gehörigen, vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung. Durch die hintereinander längs der Strecken $0 < r < 1$ und $1 < r < \frac{1}{k}$ der r -Achse ausgeführten Integrationen

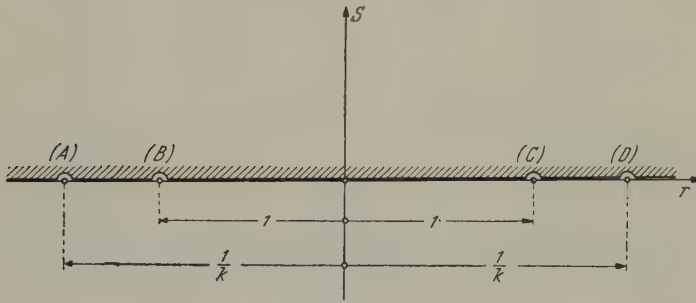


Abb. 8. Transformation des Potentialproblems in die komplexe $q = (r + i s)$ -Ebene

der Gleichung (119) folgen dann für die Daten des Rechteckes in der ζ -Ebene die Relationen

$$C K(k) = p \tau \quad (121)$$

und

$$C K'(k) = 2 d. \quad (122)$$

Wir entnehmen ihnen die transzendente Modulgleichung

$$\frac{K'(k)}{K(k)} = \frac{2 d}{p \tau}, \quad (123)$$

welche mittels Abb. 9 graphisch gelöst werden kann; ist dies geschehen, so mag C wahlweise aus einer der beiden äquivalenten Beziehungen

$$C = \frac{p \tau}{K(k)} = \frac{2 d}{K'(k)} \quad (124)$$

berechnet werden. Mit dem Funktionssymbol sn die Jacobische elliptische Funktion Sinusamplitude bezeichnend, erschließt man also aus (119) und (124) die explizite Gestalt

$$q = \text{sn} K \frac{\zeta}{p \tau} = \text{sn} K' \frac{\varphi}{2 d} \quad (125)$$

für die konforme Abbildung der ζ -Ebene in die q -Ebene.

Nach ihrer Transformation in die q -Ebene lauten die Randbedingungen (115)

$$u^+ = \mp \frac{1}{2} J(t) \quad \text{für } r \leq 0; \quad s = 0. \quad (126)$$

Sie werden von dem komplexen Potential

$$\psi^+ = J(t) \frac{1}{\pi i} \ln \frac{i}{q} \quad (127)$$

erfüllt, sofern man unter dem Funktionszeichen $\ln$ in jenen Hauptzweig des natürlichen Logarithmus versteht, dessen Imaginärteil zwischen $(-\pi)$ und $(+\pi)$ eingeschlossen ist. Im nämlichen Sinne gewinnt man durch Substitution von (125) in (127) für das komplexe Potential ψ^+ der ζ -Ebene die Darstellung

$$\psi^+ = J(t) \frac{1}{\pi i} \ln \frac{i}{\operatorname{sn} K \frac{\zeta}{p\tau}}, \quad (128)$$

und wenn man jetzt mittels (107) zu den ursprünglichen Orthogonalkoordinaten (x, y) zurückkehrt

$$\psi^+ = J(t) \frac{1}{\pi i} \ln \frac{i}{\operatorname{sn} K \frac{x - \frac{\tau}{2} + iy}{p\tau}}. \quad (129)$$

Vertauscht man in ihr $J(t)$ mit $[-J(t)]$ und $[-\frac{\tau}{2}]$ mit $\frac{\tau}{2}$, so gelangt man zur Kenntnis des komplexen Teilpotentials ψ^- des „negativen“ Wirbelsystems

$$\psi^- = -J(t) \frac{1}{\pi i} \ln \frac{i}{\operatorname{sn} K \frac{x + \frac{\tau}{2} + iy}{p\tau}}. \quad (130)$$

Daher schildert die komplexe Funktion

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^+ + \psi^- = \\ &= J(t) \frac{1}{\pi i} \ln \frac{\operatorname{sn} K \frac{x + \frac{\tau}{2} + iy}{p\tau}}{\operatorname{sn} K \frac{x - \frac{\tau}{2} + iy}{p\tau}} \end{aligned} \quad (131)$$

das resultierende Feld beider Wirbelsysteme. Die vordem nur für das positive Teilsystem benutzte Relation (109) sinngemäß auf das Gesamtfeld verallgemeinernd, entnehmen wir aus (131) dessen Vektorpotential $V^{(s)}$ zu

$$V^{(s)} = J(t) \frac{H_0}{\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{sn} K \frac{x + \frac{\tau}{2} + iy}{p\tau}}{\operatorname{sn} K \frac{x - \frac{\tau}{2} + iy}{p\tau}} \right|. \quad (132)$$

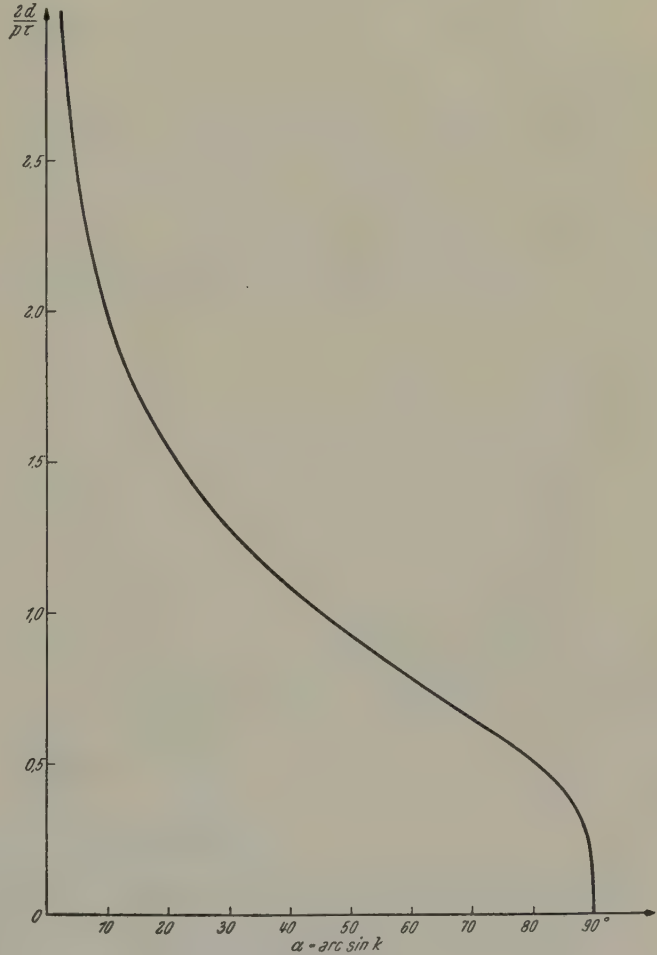


Abb. 9. Ermittlung des Moduls k aus den Daten der Maschine

Es reduziert sich längs der Ständeroberfläche auf

$$\{V^{(s)}\}_{y=0} = J(t) \frac{\Pi_0}{\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{sn} K \frac{x + \frac{\tau}{2}}{p\tau}}{\operatorname{sn} K \frac{x - \frac{\tau}{2}}{p\tau}} \right|, \quad (133)$$

so daß sein absoluter Betrag bei Annäherung an die Wirbelachsen

$$x \rightarrow \pm \frac{\tau}{2} \bmod 2p\tau \quad (134)$$

logarithmisch über alles Maß anwächst; die Berechnung des sekundären, von der kurzgeschlossenen Windung umfaßten Kerninduktionsflusses, der ja seinerseits den entsprechenden Induktivitätsanteil bestimmt, ist daher zunächst gescheitert.

Um die angezeigte Schwierigkeit zu überwinden, müssen wir die ersichtlich physikalisch unstatthafte Grenzvorschrift (102) mildern: Statt die stromführenden Bänder der tatsächlich endlichen Breite ν gedanklich in je einen Wirbelfaden zu kontrahieren, bleiben wir bei ihrem Ersatz durch je einen Hohlzylinder stehen, dessen Halbmesser ϱ wir dem mittleren geometrischen Abstand des Bandes von sich selbst gleichsetzen:

$$\varrho = \frac{\nu}{e^{\frac{3}{2}}} \quad (135)$$

Die konstruktive Voraussetzung (101) zieht dann gewiß die Ungleichung

$$\varrho \ll \tau \quad (136)$$

nach sich. Mit ihrer Hilfe folgt aus (133) das Vektorpotential $V_{\pm \frac{\tau}{2}}^{(s)}$, welches beziehentlich längs der in $\pm \frac{\tau}{2}$ zentrierten Hohlzylinder auftritt, hinreichend genau zu

$$\left. \begin{aligned} V_{\pm \frac{\tau}{2}}^{(s)} &\approx \pm J(t) \frac{\Pi_0}{\pi} \ln \frac{\operatorname{sn} K \frac{1}{p}}{\operatorname{sn} K \frac{\varrho}{p\tau}} \approx \\ &\approx \pm J(t) \frac{\Pi_0}{\pi} \ln \left(\frac{e^{\frac{3}{2}} p\tau}{K\nu} \operatorname{sn} \frac{K}{p} \right) = \pm J(t) \frac{\Pi_0}{\pi} \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{p\tau}{K\nu} \operatorname{sn} \frac{K}{p} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

In gleicher Genauigkeit resultiert somit, auf Grund des Stokesschen Satzes, für den mit der kurzgeschlossenen Windung verketteten Induktionsfluß $\Phi^{(s)}$ des untersuchten Feldes die Formel

$$\Phi^{(s)} = l \left[V_{+\frac{\tau}{2}}^{(s)} - V_{-\frac{\tau}{2}}^{(s)} \right] = J(t) \Pi_0 l \frac{2}{\pi} \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{p\tau}{K\nu} \operatorname{sn} \frac{K}{p} \right) \right]. \quad (138)$$

In diesem Felde ist die Freie Energie

$$W^{(s)} = \frac{1}{2} J(t) \Phi^{(s)} = \Pi_0 \frac{l}{2} J^2(t) \frac{2}{\pi} \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{p\tau}{K\nu} \operatorname{sn} \frac{K}{p} \right) \right] \quad (139)$$

aufgespeichert, deren der zeitlichen Fourierkomponente $J_{2m+1}(t)$ des Kurzschlußstromes zugehöriger Anteil mit der in (98) angegebenen Energiedifferenz identisch ist. Aus diesem Vergleich folgt die gesuchte Näherungsformel für die in (98) eingehende Summe

$$2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin n \frac{\pi \nu}{2 p \tau}}{n \frac{\pi \nu}{2 \pi \tau}} \sin \frac{n \pi}{2 \pi} \right]^2 \frac{1}{n} \operatorname{tgh} n \frac{\pi d}{p \tau} \approx \frac{3}{2} + \ln \left(\frac{p \tau}{K \nu} \operatorname{sn} \frac{K}{p} \right), \quad (140)$$

durch deren Substitution in (96) die Angabe

$$L_{2m+1}^{(K)} = \Pi_0 l \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{\sin (2m+1) \frac{\pi \nu}{2 \tau}}{(2m+1) \frac{\pi \nu}{2 \tau}} \right]^2 \frac{2}{p (2m+1) \sinh (2m+1) \frac{2 \pi d}{\tau}} + \frac{3}{2} + \ln \left(\frac{p \tau}{K \nu} \operatorname{sn} \frac{K}{p} \right) \right\} \quad (141)$$

resultiert. In der Regel fällt nun wegen $d \ll \tau$ der Modul k nach (123) nahezu gleich 1 aus. Man darf sich dann der Näherungen

$$K = K' \frac{p \tau}{2 d} \approx \frac{\pi}{4} \frac{p \tau}{2 d} = \frac{\pi}{8} \frac{p \tau}{d} \quad (142)$$

sowie

$$\operatorname{sn} \frac{K}{p} \approx \operatorname{tgh} \frac{K}{p} \approx \operatorname{tgh} \frac{\pi}{8} \frac{\tau}{d} = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{4} \frac{\tau}{d}}}{1 + e^{-\frac{\pi}{4} \frac{\tau}{d}}} \approx 1 - 2 e^{-\frac{\pi}{4} \frac{\tau}{d}} \quad (143)$$

bedienen, mit deren Hilfe sich (141) auf

$$L_{2m+1}^{(K)} \approx \Pi_0 l \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{\sin (2m+1) \frac{\pi \nu}{2 \tau}}{(2m+1) \frac{\pi \nu}{2 \tau}} \right]^2 \frac{2}{p (2m+1) \sinh (2m+1) \frac{2 \pi d}{\tau}} + \frac{3}{2} - 2 e^{-\frac{\pi}{4} \frac{\tau}{d}} + \ln \frac{8 d}{\pi \nu} \right\} \quad (144)$$

reduziert. Bei der Anwendung dieser Formel auf die Grundwelle ($m=0$) des Kurzschlußstromes darf man sich der Näherungen

$$\sin \frac{\pi \nu}{2 \tau} \approx \frac{\pi \nu}{2 \tau}; \quad \sinh \frac{2 \pi d}{\tau} \approx \frac{2 \pi d}{\tau} \quad (145)$$

bedienen und überdies das innerhalb der geschweiften Klammer auftretende Exponentialglied gegen die übrigen Posten vernachlässigen; die Grundfeld-Kerninduktivität $L_1^{(K)}$ kann somit in ausreichender Genauigkeit nach der einfachen Vorschrift

$$L_1^{(K)} = \Pi_0 l \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\tau}{p \pi d} + \frac{3}{2} + \ln \frac{8 d}{\pi \nu} \right\} \quad (146)$$

berechnet werden.

Das sekundäre Stirnfeld

Aus Symmetriegründen weist das sekundäre Magnetfeld des Kurzschlußstromes in den beiden Stirnräumen der Maschine spiegelbildlich gleiche Struktur auf. Dieser Sachverhalt ermöglicht mittels des freilich nur formalen Grenzüberganges

$$l \rightarrow 0 \quad (147)$$

die Konstruktion eines selbständigen, sekundären Stirnfeldes, welches von seiner in Wahrheit bestehenden, sozusagen organischen Verbindung mit dem Maschinenkern gelöst ist. Bei dem Vollzug dieses gedanklichen Prozesses verschmelzen die vorher getrennten Flanken $z = \pm \frac{1}{2} l$ des Kernes zu der einen Kreisfläche

$$z = 0; \quad 0 < r < R_3. \quad (148)$$

Sie ist, im Einklang mit (1), innerhalb der Gebiete

$$z = 0; \quad 0 < r < R_1 \quad (149)$$

und

$$z=0; \quad R_2 < r < R_3 \quad (150)$$

als vollkommen permeabel ($\mu \leftarrow \infty$) vorauszusetzen, während der Ringschlitz

$$z=0; \quad R_1 < r < R_2 \quad (151)$$

als unmagnetisch ($\mu=1$) zu gelten hat. Die gleichfalls als vollkommen permeabel zu betrachtenden Abschlußebenen befinden sich nunmehr in

$$z=\pm b \quad (152)$$

und die mit den nämlichen Eigenschaften auszustattende radiale Hülle koinzidiert mit dem Zylinder

$$r=R_4. \quad (153)$$

Die mathematisch strenge, geschlossene Lösung der durch diese Angaben im Verein mit der Form der Kurzschlußstrombahn definierten Potentialaufgabe stößt auf unüberwindliche analytische Schwierigkeiten. Wir müssen uns daher mit ihrer angenäherten Behandlung begnügen, welche auf folgenden Annahmen beruht:

1. Nach Vereinbarung bleibt die induktive Verkettung zwischen der kurzgeschlossenen Windung und den Erregerspulen des Läufers im Stirnraum der Maschine systematisch außer Betracht.

2. Von der in Wahrheit p -polpaarigen Maschine gehen wir durch den Prozeß

$$\begin{aligned} p &\rightarrow \infty; & R_1 &\rightarrow \infty; \\ R_2 &\rightarrow \infty; & R_4 &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (154)$$

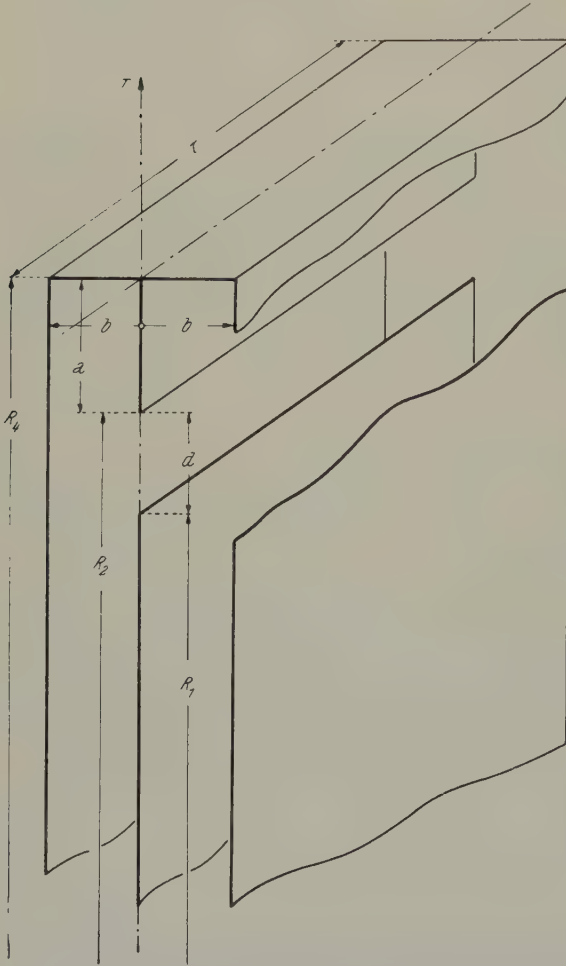


Abb. 10. Die zusammengeschobenen Stirnräume im Grenzfalle $p \rightarrow \infty; R_2 \rightarrow \infty$

zu einer Maschine von unendlich vielen Polpaaren über, wobei jedoch die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} \frac{\pi R_2}{p} = \tau; \quad \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} [R_2 - R_1] = d; \quad \lim_{\substack{R_3 \rightarrow \infty \\ R_4 \rightarrow \infty}} [R_4 - R_2] = a \quad (155)$$

gefordert wird. Abb. 10 veranschaulicht die hieraus hervorgehende Gestalt der (zusammengeschobenen) Stirnräume. Da nunmehr der Ursprung der früher benutzten Zylinderkoordinaten z, r, α von dem „aktiven“, durch den Kurzschlußstrom erregten Gebiet der Stirnräume unmeßbar weit entfernt liegt, ziehen wir zur Beschreibung des gesuchten Feldes fortan ein neues, „lokales“ Bezugssystem der rechtsläufigen Kartesischen Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ vor: Die aus dem Kreise (148) hervorgehende

3. Die im ursprünglichen Maschinenmodell beziehentlich von den entgegengesetzt gleichen Durchflutungen $\pm J(t)$ durchströmten Bögen

verwandeln sich bei dem doppelten Grenzübergang (147), (154) in die gestreckten Bänder

Gleichzeitig gehen die vom Kern her geradlinig in die Stirnräume hinein verlängerten Ständernutenleiter in die parallelen Schienen

über, welche im Verein mit den Bändern (157) einen geschlossenen Stromkreis bilden; im Zuge seines Umfanges führe er den gleichförmigen Strombelag

längs seiner geradlinigen Leiterstrecken, während die Struktur des Strömungsfeldes an den durch Überlappung entstehenden Ecken außer Betracht bleibe.

The diagram shows a rectangular region in the complex plane with vertices A , B , C , and D . The horizontal axis is labeled x and the vertical axis is labeled y . The complex plane is represented by $\bar{Z} = \bar{x} + i\bar{y}$. The region is bounded by $x = -b$ and $x = b$, and $y = -a$ and $y = a$. A branch cut is indicated by a shaded vertical strip along the imaginary axis ($x = 0$). The region is divided into two parts by this cut. The left part contains a point B with a cross symbol and a vector $\vec{r}_B$ pointing from the origin. The right part contains a point C with a circle symbol and a vector $\vec{r}_C$ pointing from the origin. The distance from the origin to B is $b/2$ and the distance from the origin to C is $b/2$. The vertical distance from the x -axis to A is a and the vertical distance from the x -axis to D is a . The horizontal distance from the y -axis to B is $b/2$ and the horizontal distance from the y -axis to C is $b/2$. The total width of the rectangle is b on each side of the imaginary axis.

Abb. 11. Das lokale Bezugssystem der zusammengeschobenen Stirnräume

I. Unter bewußtem Verzicht auf die in (158) explizit angegebene, wirkliche Form der verbindenden Stromschienen übertragen wir deren sozusagen galvanische Funktion beziehentlich den beiden Ebenen

$$\bar{z} = \pm \frac{1}{2} \tau, \quad (160)$$

deren jede wir als elektrisch vollkommen leitfähig ansehen. Durch diesen Kunstgriff beschränken wir das nunmehr sich bildende magnetische Feld der zusammengeschobenen Stirnräume durchaus auf den Bereich

$$|\bar{z}| < \frac{1}{2} \tau, \quad (161)$$

und dort wird seine Struktur, unabhängig von der Lage der jeweils gewählten Kontrollebene $z = \text{const.}$, lediglich von den „Querkoordinaten“ x und y des Aufpunktes bestimmt; insbesondere diktiert die beziehentlich tangentiell zu den Ebenen (160) liegende Komponente der magnetischen Feldstärke mittels des Durchflutungsgesetzes sozusagen nachträglich den ebendort herrschenden Strombelag, dessen räumliche Verteilung somit den dynamischen Ersatz der ja außer Kraft gesetzten geometrischen Angaben (158) liefert.

II. Die konstruktive Annahme (101) durch die Ungleichung

$$v \ll b \quad (162)$$

ergänzend, vertauschen wir die Bänder (157) beziehentlich mit den in

$$\bar{x} = \pm \frac{1}{2} b; \quad \bar{y} = 0 \quad (163)$$

zentrierten Hohlzylindern je des gemäß (135) bestimmten äquivalenten Halbmessers $\varrho = \frac{\gamma}{\frac{3}{e^2}}$.

Nach allen diesen Vorbereitungen fassen wir die Koordinaten $\bar{x}$ und $\bar{y}$ zur komplexen Gaußschen Koordinate

$$\bar{Z} = \bar{x} + i \bar{y}; \quad i = \sqrt{-1} \quad (164)$$

zusammen, in deren Ebene wir das gesuchte magnetische Feld zunächst durch seine skalare Potentialfunktion $u = u(\bar{x}, \bar{y})$ beschreiben; im Bereiche (161) genügt sie der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2} = 0, \quad (165)$$

während sie außerhalb dieses Bereiches und im Streifen $|\bar{x}| < b, \bar{y} < (-a)$ identisch verschwindet. Ergänzen wir nun das reelle Potential $u = u(\bar{x}, \bar{y})$ durch seine konjugierte Funktion $v = v(\bar{x}, \bar{y})$ zu der mit Ausnahme isolierter Punkte ihres Existenzbereiches komplexen analytischen Funktion

$$w(\bar{Z}) = u + i v, \quad (166)$$

so ist v als Stromfunktion des untersuchten Feldes zu deuten, aus welcher das parallel zur z -Achse weisende Vektorpotential V dieses Feldes durch die Ähnlichkeitstransformation

$$V(\bar{x}, \bar{y}) = -\Pi_0 \cdot v(\bar{x}, \bar{y}) \quad (167)$$

hervorgeht. Da nun sowohl in u wie in v je eine willkürliche, additive Konstante verbleibt, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit das komplexe Potential w folgenden Randbedingungen unterwerfen:

1. Längs der Geraden $\bar{x} = 0$ sei

$$u = 0 \text{ für } (-a) < \bar{y} < 0 \text{ und } d < \bar{y} < \infty \quad (168)$$

sowie

$$v = 0 \text{ für } 0 < \bar{y} < d. \quad (169)$$

2. Längs der Geraden $\bar{x} = \pm b$ fordern wir

$$u = 0 \text{ für } (-a) < \bar{y} < \infty. \quad (170)$$

3. Die in $(\pm \frac{1}{2}b, 0)$ zentrierten Hohlzylindern je des Halbmessers ϱ vorübergehend zu Wirbelfäden beziehentlich der Durchflutungen $\pm J(t)$ kontrahierend, haben wir die Befriedigung der „Erregergleichung“

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left[2\pi \varrho \frac{\partial v}{\partial \varrho} \right]_{\bar{x} = \pm \frac{1}{2}b, \bar{y} = 0} = \pm J(t) \quad (171)$$

zu verlangen.

Zur Lösung der nunmehr formulierten Aufgabe richten wir unser Augenmerk auf den Halbstreifen $0 < \bar{x} < b$; $(-a) < \bar{y} < \infty$ der $\bar{Z}$ -Ebene (Abb. 11), auf dessen Kontur wir die Punkte

$$\begin{aligned} A &= (0, d); \\ B &= (0, 0); \\ C &= (0, -a); \\ D &= (b, -a) \end{aligned} \quad (172)$$

markieren. Nun rufen wir die komplexe

$$q = r + i s \quad (173)$$

Ebene zu Hilfe und suchen diejenige konforme Abbildung, welche das Innere jenes mathematisch-positiv umlaufenen Streifens derart in die Halbebene $s > 0$ transformiert, daß die Ecken C und D entsprechend Abb. 12 beziehentlich in die Punkte

$$r_C = -1; \quad r_D = +1 \quad (174)$$

der r -Achse geworfen werden. Nach Wahl einer vorerst noch unbekannten, festen Maßstabsziffer M unterliegt diese Abbildung der Schwarz-Christoffelschen Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{Z}}{dq} = \frac{M}{\sqrt{1-q^2}}, \quad (175)$$

welche mittels der gleichfalls noch unbekannten, additiven Integrationskonstanten N durch

$$\bar{Z} = M \cdot \arcsin q + N \quad (176)$$

gelöst wird. Die in (172) angegebene Lage der Punkte C und D in der $\bar{Z}$ -Ebene findet somit in den Gleichungen

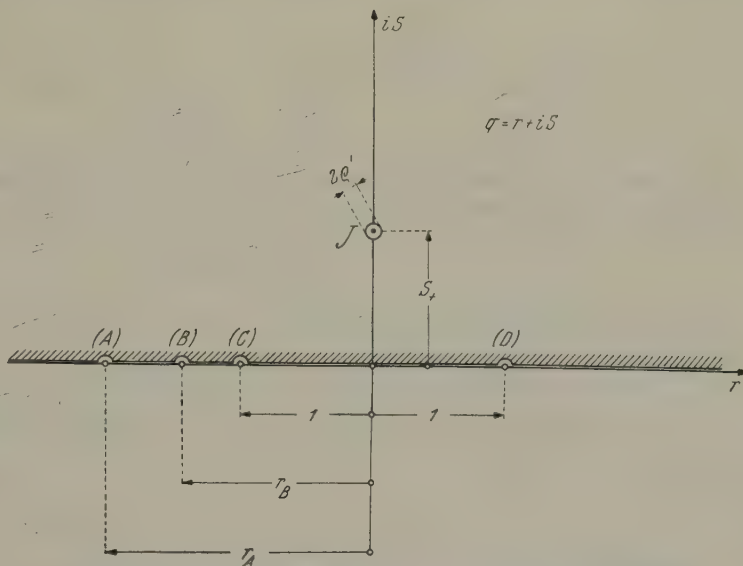


Abb. 12. Konforme Abbildung der $\bar{Z}$ -Ebene auf die q -Ebene

$$-i a = M \arcsin(-1) + N \quad (177)$$

und

$$b - i a = M \arcsin(+1) + N \quad (178)$$

ihren Ausdruck, welchen man die Aussagen

$$M = \frac{b}{\pi}; \quad N = \frac{b}{2} - i a \quad (179)$$

entnimmt; daher folgt aus (176) für die Abbildung der $\bar{Z}$ - auf die q -Ebene die explizite Gestalt

$$q = -\cos \pi \frac{\bar{Z} + i a}{b}. \quad (180)$$

Nach der Transformation treffen wir also den Punkt $A = (0, d)$ am Orte

$$r_A = -\cosh \pi \frac{d + a}{b} \quad (181)$$

und den Punkt $B = (0, 0)$ am Orte

$$r_B = -\cosh \pi \frac{a}{b} \quad (182)$$

der r -Achse an, während der ursprünglich in $\bar{Z}_+ = (\frac{1}{2} b, 0)$ gelegene, „positive“ Wirbelfaden der Stärke $(+J)$ in den Punkt

$$S_+ = \sinh \pi \frac{a}{b} \quad (183)$$

der s -Achse befördert wird. Längs der r -Achse genügt somit das komplexe Potential w des gesuchten Feldes den Randbedingungen

$$u = 0 \text{ für } (-\infty) < r < \left(-\cosh \pi \frac{d+a}{b}\right) \text{ und } \left(-\cosh \pi \frac{a}{b}\right) < r < (+\infty) \quad (184)$$

sowie

$$v = 0 \text{ für } \left(-\cosh \pi \frac{d+a}{b}\right) < r < \left(-\cosh \pi \frac{a}{b}\right). \quad (185)$$

Schließlich mit

$$\varrho' = \varrho \left| \frac{dq}{d\bar{Z}} \right|_{q=0+i s_+} = \pi \frac{\varrho}{b} \cosh \pi \frac{a}{b} \quad (186)$$

den in die q -Ebene übertragenen Halbmesser des sich kontrahierenden positiven Wirbels bezeichnend, folgt aus (171) die auf ihn bezügliche transformierte Erregergleichung

$$\lim_{\varrho' \rightarrow 0} \left[2\pi \varrho' \frac{\partial v}{\partial \varrho'} \right]_{r=0, s=\sinh \pi \frac{a}{b}} = +J. \quad (187)$$

Zur Lösung dieser Randwertaufgabe ziehen wir die komplexe

$$\zeta = \xi + i \eta \quad (188)$$

Ebene heran; den ihr angehörigen Halbstreifen

$$-\frac{\pi}{2} < \xi < +\frac{\pi}{2}; \quad 0 < \eta < \infty \quad (189)$$

im mathematisch-positiven Sinne umfahrend, soll dessen Inneres entsprechend Abb. 13 auf die positiv-imaginäre q -Halbebene konform derart abgebildet werden, daß der

Punkt $(\xi, \eta) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ in $(r, s) = (r_A, 0)$ und der Punkt $(\xi, \eta) = \left(+\frac{\pi}{2}, 0\right)$ in $(r, s) = (r_B, 0)$ übergeht. Die verlangte Transformation gehorcht bei passender Wahl der festen Maßstabsziffer $i M'$ [$i = \sqrt{-1}$] der Schwarz-Christoffelschen Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{dq} = \frac{i M'}{\sqrt{(q - r_A)(q - r_B)}}. \quad (190)$$

Mit Rücksicht auf (181) und (182) gilt die Identität

$$\left. \begin{aligned} (q - r_A)(q - r_B) &\equiv \left(q - \frac{r_A + r_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_A - r_B}{2}\right)^2 \equiv \\ &\equiv \left(q + \cosh \pi \frac{2a+d}{2b} \cosh \pi \frac{d}{2b}\right)^2 - \left(\sinh \pi \frac{2a+d}{2b} \sinh \pi \frac{d}{2b}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

Daher liefert (190) das Integral

$$\begin{aligned} \xi = M' \operatorname{arc} \sin & \frac{q + \cosh \pi \frac{2a+d}{2b} \cosh \pi \frac{d}{2b}}{\sinh \pi \frac{2a+d}{2b} \sinh \pi \frac{d}{2b}} + \\ & + N', \end{aligned} \quad (192)$$

welches die vorerst noch unbekannte additive Konstante N' enthält. Nun zieht die oben geforderte Punkttransformation die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} = & \\ = M' \operatorname{arc} \sin & \frac{r_A + \cosh \pi \frac{2a+d}{2b} \cosh \pi \frac{d}{2b}}{\sinh \pi \frac{2a+d}{2b} \sinh \pi \frac{d}{2b}} + \\ & + N' = -M' \frac{\pi}{2} + N' \end{aligned} \quad (193)$$

und

$$+\frac{\pi}{2} = M' \operatorname{arc} \sin \frac{r_B + \cosh \pi \frac{2a+d}{2b} \cosh \pi \frac{d}{2b}}{\sinh \pi \frac{2a+d}{2b} \sinh \pi \frac{d}{2b}} + N' = M' \frac{\pi}{2} + N' \quad (194)$$

nach sich, welchen man die Angaben

$$M' = 1; \quad N' = 0 \quad (195)$$

entnimmt. Daher reduziert sich (192) auf

$$\xi = \operatorname{arc} \sin \frac{q + \cosh \pi \frac{2a+d}{2b} \cosh \pi \frac{d}{2b}}{\sinh \pi \frac{2a+d}{2b} \sinh \pi \frac{d}{2b}}, \quad (196)$$

so daß die Achse des positiven Wirbels im Punkte

$$\left. \begin{aligned} \xi_+ = \operatorname{arc} \sin & \frac{i \sinh \pi \frac{a}{b} + \cosh \pi \frac{2a+d}{2b} \cosh \pi \frac{d}{2b}}{\sinh \pi \frac{2a+d}{2b} \sinh \pi \frac{d}{2b}} = \\ & = \operatorname{arc} \sin \left[\cotgh \pi \frac{d}{2b} \cotgh \pi \frac{2a+d}{2b} + i \left(\cotgh \pi \frac{d}{2b} - \cotgh \pi \frac{2a+d}{2b} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

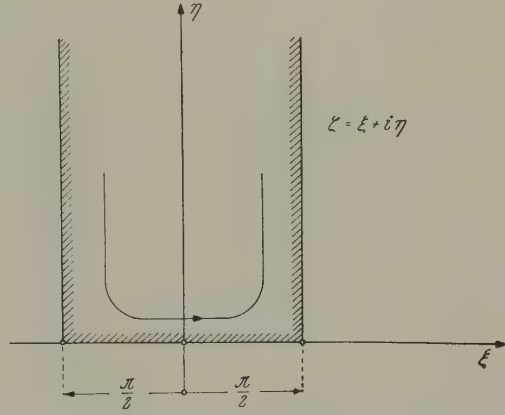


Abb. 13. Konforme Abbildung der q -Ebene auf die ξ -Ebene

der später genannten Wirbelpunkte und Verzweigungsschnitte erweiternd, machen wir zunächst gemäß Abb. 15 den zu ζ_+ konjugiert-komplexen Punkt

$$\zeta_- = \zeta_+^* \quad (206)$$

der Koordinaten

$$\xi_- = \xi_+; \quad \eta_- = -\eta_+ \quad (207)$$

zum Träger eines „negativen“ Wirbelfadens der Stärke $[-J(t)]$; das resultierende magnetische Feld des beziehentlich in $\zeta_{\pm}$ zentrierten Wirbelpaares $\pm J(t)$ genügt dann aus Symmetriegründen gewiß der Randbedingung (204).

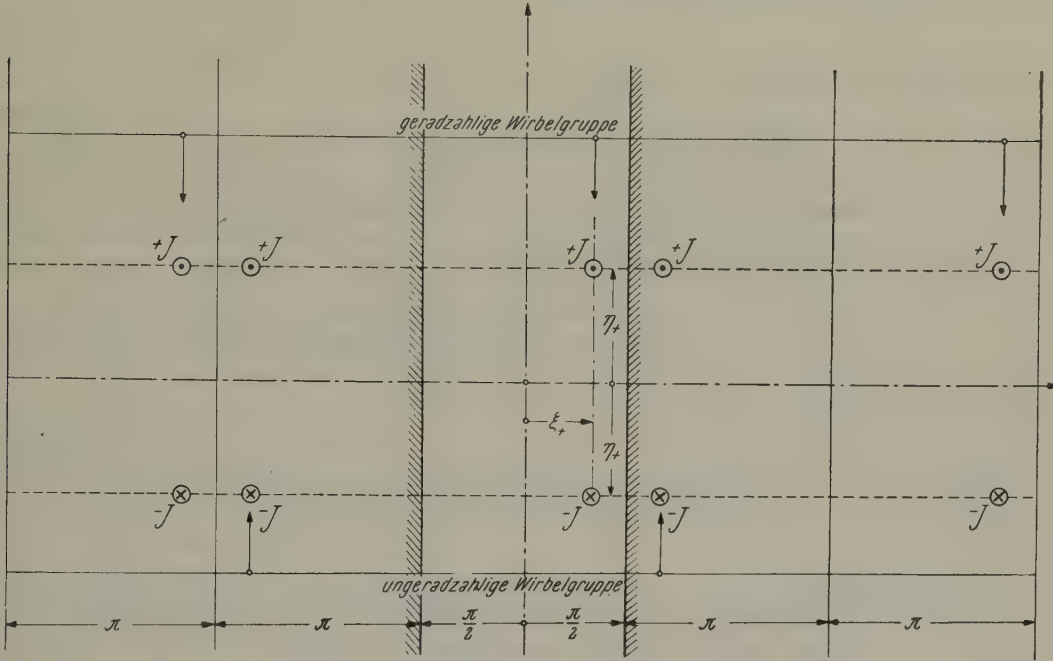


Abb. 15. Wirbelstraße des Stirnfeldes

2. Ohne das bereits Erreichte aufzugeben, entwickeln wir aus dem vorgenannten Wirbelpaar eine doppelreihige, geradlinige Wirbelstraße, deren Achse mit der ξ -Achse koinzidiert. Diese Straße enthält zwei Gruppen:

I. Die „geradzahlige“ Wirbelgruppe umfaßt die nach Abb. 15 beziehentlich in

$$\zeta_{\pm}^I = \xi_{\pm} \pm i\eta_{\pm} + 2\pi n; \quad -\infty < n < \infty \quad (208)$$

zentrierten, abzählbar unendlich vielen Wirbelpaare je der einheitlichen Stärke $\pm J(t)$.

II. Die „ungeradzahlige“ Wirbelgruppe umfaßt die nach Abb. 15 beziehentlich in

$$\zeta_{\pm}^{II} = -\xi_{\pm} \pm i\eta_{\pm} + \pi(2n+1); \quad -\infty < n < \infty \quad (209)$$

zentrierten, gleichfalls abzählbar unendlich vielen Wirbelpaare je der nämlichen, einheitlichen Stärke $\pm J(t)$.

Mit Hilfe dieser Gruppen bilden wir die Funktion

$$w(\zeta) = \frac{J}{2\pi i} \ln \frac{\sin \frac{1}{2}(\zeta - \xi_+ + i\eta_+)}{\sin \frac{1}{2}(\zeta - \xi_+ - i\eta_+)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\zeta + \xi_+ + i\eta_+)}{\cos \frac{1}{2}(\zeta + \xi_+ - i\eta_+)}, \quad (210)$$

in welcher allerdings der Wert des natürlichen Logarithmus erst mittels geeigneter, etwa von je einem Wirbelpunkte der Straße parallel nach außen geführter Verzweigungsschnitte eindeutig festgelegt werden muß. Um uns von dieser Komplikation zu befreien, gehen wir von dem bisher benutzten, komplexen Potential w zum Vektorpotential V über und erhalten nach (167) die nunmehr von Haus aus eindeutige Darstellung

$$V = \Pi_0 \frac{J}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(\zeta - \xi_+ + i\eta_+)}{\sin \frac{1}{2}(\zeta - \xi_+ - i\eta_+)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\zeta + \xi_+ + i\eta_+)}{\cos \frac{1}{2}(\zeta + \xi_+ - i\eta_+)} \right|. \quad (211)$$

Aus ihr finden wir auf Grund der beschränkenden Voraussetzung (162) den Wert V_+ des Vektorpotentials längs der Oberfläche

$$|\zeta - \zeta_+| = \varrho'' \quad (212)$$

des „positiven“ Stromleiters in hinreichender Genauigkeit zu

$$\begin{aligned} V_+ &\approx \Pi_0 \frac{J}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{1}{2} 2i\eta_+}{\sin \frac{1}{2} \varrho''} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(2\xi_+ + 2i\eta_+)}{\cos \frac{1}{2} 2\xi_+} \right| = \\ &= \Pi_0 \frac{J}{2\pi} \ln \left(\frac{\sinh \eta_+}{\sin \frac{1}{2} \varrho''} \sqrt{\cosh^2 \eta_+ + \operatorname{tg}^2 \xi_+ \sinh^2 \eta_+} \right) \end{aligned} \quad (213)$$

oder, unter nochmaliger Berufung auf (162) und mit Hilfe von (202),

$$\begin{aligned} V_+ &\approx \Pi_0 \frac{J}{2\pi} \left[\frac{3}{2} + \ln \frac{2b}{\pi\nu} + \ln \frac{\sqrt[4]{\cosh 2\pi \frac{a}{b} \left[\sinh^2 \pi \frac{a}{b} + \cosh^2 \pi \frac{a+d}{b} \right]}}{\cosh \pi \frac{a}{b}} + \right. \\ &\quad \left. + \ln (\sinh \eta_+ \sqrt{\cosh^2 \eta_+ + \operatorname{tg}^2 \xi_+ \sinh^2 \eta_+}) \right]. \end{aligned} \quad (214)$$

Auf demselben Wege ergibt sich für das Vektorpotential V_- längs der Oberfläche

$$|\zeta - \zeta_-| = \varrho'' \quad (215)$$

des „negativen“ Stromleiters der Ausdruck

$$V_- = -V_+. \quad (216)$$

Daher umfassen die beiden, gegensinnig durchflossenen Stromleiter im Verein mit den verbindenden Ebenen $z = \pm \frac{1}{2} \tau$ den magnetischen Induktionsfluß

$$\Phi = \tau (V_+ - V_-) = 2\tau V_+, \quad (217)$$

so daß die Induktivität $L^{(St)}$ der zusammengeschobenen Stirnräume durch die Formel

$$\begin{aligned} L^{(St)} = \frac{\Phi}{J} &= \Pi_0 \frac{\tau}{\pi} \left[\frac{3}{2} + \ln \frac{2b}{\pi\nu} + \ln \frac{\sqrt[4]{\cosh 2\pi \frac{a}{b} \left[\sinh^2 \pi \frac{a}{b} + \cosh^2 \pi \frac{a+d}{b} \right]}}{\cosh \pi \frac{a}{b}} + \right. \\ &\quad \left. + \ln (\sinh \eta_+ \sqrt{\cosh^2 \eta_+ + \operatorname{tg}^2 \xi_+ \sinh^2 \eta_+}) \right] \end{aligned} \quad (218)$$

dargestellt wird; sie gilt, ihrer Herleitung nach, sowohl für den gesamten Kurzschlußstrom wie für jede seiner harmonischen Komponenten einzeln.

Während die ersten drei Posten der innerhalb der Klammer auftretenden Summe durch die konstruktiven Maße des Maschinenmodells unmittelbar gegeben sind, bedarf der letzte Posten zu seiner expliziten Berechnung der auf (197) angewandten Relationen (199) und (200), aus welchen man

$$\left. \begin{aligned} \sinh \eta_+ \sqrt{\cosh^2 \eta_+ + \operatorname{tg}^2 \xi_+ \sinh^2 \eta_+} &\equiv \frac{\sinh \eta_+}{\cos \xi_+} \left| \cos (\xi_+ + \eta_+) \right| = \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma^2+\delta^2)^2 + (2\gamma\delta)^2} + (\gamma^2 + \delta^2 - 1)}{\sqrt{(1-\gamma^2+\delta^2)^2 + (2\gamma\delta)^2} - (\gamma^2 + \delta^2 - 1)}} \sqrt{(1-\gamma^2+\delta^2)^2 + (2\gamma\delta)^2}; \\ \gamma &= \operatorname{cotgh} \pi \frac{d}{2b} \cdot \operatorname{cotgh} \pi \frac{2a+d}{2b} \quad \delta = \operatorname{cotgh} \pi \frac{d}{2b} - \operatorname{cotgh} \pi \frac{2a+d}{2b} \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

entnimmt.

Obwohl wir mit (218) und (219), im Rahmen der hier erstrebten Genauigkeit, zu einer erschöpfenden Kenntnis der Stirninduktivität $L^{(st)}$ gelangt sind, bleibt uns doch der unmittelbare Einblick in deren Abhängigkeit von den Konstruktionsdaten der Maschine verschlossen. Wir werden uns deshalb auf die Diskussion zweier Grenzfälle beschränken, welche von diesen sozusagen methodischen Mängeln frei sind:

1. Wir denken uns den Einfluß der vollkommen permeablen Läuferflanke auf das magnetische Stirnfeld beseitigt, indem wir den Prozeß

$$\frac{d}{b} \rightarrow \infty \quad (220)$$

vollziehen.

Sei zunächst nur $\frac{d}{b} \gg 1$ vorausgesetzt, so findet man durch Entwicklung des $\cosh \pi \frac{a+d}{b}$ nach Potenzen von $e^{-\pi \frac{d}{b}}$

$$\ln \frac{\sqrt[4]{\cosh 2\pi \frac{a}{b} \left[\sinh^2 \pi \frac{a}{b} + \cosh^2 \pi \frac{a+d}{b} \right]}}{\cosh \pi \frac{a}{b}} = \frac{\pi}{2} \frac{a+d}{b} + \ln \frac{\sqrt[4]{\cosh 2\pi \frac{a}{b}}}{\sqrt[4]{2} \cosh \pi \frac{a}{b}} + \dots \quad (221)$$

Auf demselben Wege ergibt sich aus (197) und (198) durch Entwicklung der hyperbolischen Kotangensfunktionen

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \operatorname{cotgh} \pi \frac{d}{b} \operatorname{cotgh} \pi \frac{2a+d}{b} = \left[1 + 2 e^{-\pi \frac{d}{b}} + \dots \right] \left[1 + 2 e^{-\pi \frac{2a+d}{b}} + \dots \right] = \\ &= 1 + 2 e^{-\pi \frac{d}{b}} \left(1 + e^{-\pi \frac{2a}{b}} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \operatorname{cotgh} \pi \frac{d}{b} - \operatorname{cotgh} \pi \frac{2a+d}{b} = \left[1 + 2 e^{-\pi \frac{d}{b}} + \dots \right] - \left[1 + 2 e^{-\pi \frac{2a+d}{b}} + \dots \right] = \\ &= 2 e^{-\pi \frac{d}{b}} \left(1 - e^{-\pi \frac{2a}{b}} \right) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

also weiter

$$\gamma^2 + \delta^2 + 1 = 2 \left[1 + 4 e^{-\pi \frac{d+a}{b}} \cosh \pi \frac{a}{b} \right] + \dots \quad (224)$$

$$\gamma^2 + \delta^2 - 1 = 2 \quad 4 e^{-\pi \frac{d+a}{b}} \cosh \pi \frac{a}{b} + \dots \quad (225)$$

und

$$(1 - \gamma^2 + \delta^2)^2 + (2 \gamma \delta)^2 = 4 \cdot 16 \cdot e^{-2\pi \frac{d+a}{b}} \cosh 2\pi \frac{a}{b} + \dots \quad (226)$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (199) und (200) liefert die Relationen

$$\sin^2 \xi_+ = 1 - 4 e^{-\pi \frac{d+a}{b}} \left(\sqrt{\cosh 2\pi \frac{a}{b}} - \cosh \pi \frac{a}{b} \right) + \dots \quad (227)$$

und

$$\sinh^2 \eta_+ = 4 e^{-\pi \frac{d+a}{b}} \left(\sqrt{\cosh 2\pi \frac{a}{b}} + \cosh \pi \frac{a}{b} \right) + \dots, \quad (228)$$

welchen man die Formeln

$$\cos \xi_+ = 2 e^{-\pi \frac{d+a}{2b}} \sqrt{\cosh 2\pi \frac{a}{b} - \cosh \pi \frac{a}{b}} + \dots \quad (229)$$

und

$$\sinh \eta_+ = 2 e^{-\pi \frac{d+a}{2b}} \sqrt{\cosh 2\pi \frac{a}{b} + \cosh \pi \frac{a}{b}} + \dots \quad (230)$$

entnimmt. Schließlich folgt aus der Definition

$$\sin (\xi_+ + i \eta_+) = \gamma + i \delta \quad (231)$$

mit

$$\cos^2 (\xi_+ + i \eta_+) = 1 - \sin^2 (\xi_+ + i \eta_+) = 1 - \gamma^2 + \delta^2 + 2 i \gamma \delta \quad (232)$$

die Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{\cos^2 \xi_+ \cosh^2 \eta_+ + \sin^2 \xi_+ \sinh^2 \eta_+} = \sqrt{|\cos^2 (\xi_+ + i \eta_+)|} = \\ & = \sqrt[4]{(1 - \gamma^2 + \delta^2)^2 + (2 \gamma \delta)^2} = 2 \sqrt[4]{2} e^{-\pi \frac{d+a}{b}} \sqrt{\cosh 2\pi \frac{a}{b} + \dots} \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

Mit Hilfe der Angaben (221), (229), (230) und (233) berechnet man den Grenzwert

$$\left. \begin{aligned} & \lim_{\frac{d}{b} \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{\sqrt[4]{\cosh 2\pi \frac{a}{b}} \left[\sinh^2 \pi \frac{a}{b} + \cosh^2 \pi \frac{a+d}{b} \right]}{\cosh \pi \frac{a}{b}} + \right. \\ & \quad \left. + \ln (\sinh \eta_+ \sqrt{\cosh^2 \eta_+ + \operatorname{tg}^2 \xi_+ \sinh^2 \eta_+}) \right] = \\ & = \ln \frac{2 \sqrt{\cosh 2\pi \frac{a}{b}}}{\cosh \pi \frac{a}{b}} \sqrt{\frac{\sqrt{\cosh 2\pi \frac{a}{b} + \cosh \pi \frac{a}{b}}}{\sqrt{\cosh 2\pi \frac{a}{b} - \cosh \pi \frac{a}{b}}}} \equiv \ln 2 + \\ & \quad + \frac{1}{2} \ln \left[\left(1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{a}{b} \right) \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{a}{b}} + 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{a}{b}} - 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Führen wir also abkürzend die Funktion

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \ln \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} \ln \left[\left(1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{a}{b}\right) \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{a}{b}} + 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{a}{b}} - 1} \right] \quad (235)$$

des in Abb. 16 dargestellten Verlaufes ein, so entsteht aus (218) die Aussage

$$\lim_{\frac{a}{b} \rightarrow \infty} L^{(St)} = \Pi_0 \frac{\tau}{\pi} \left[\frac{3}{2} + \ln \frac{b}{\nu} + f\left(\frac{a}{b}\right) \right]. \quad (236)$$

Nun schildert

$$L^{(St)'} = \Pi_0 \frac{\tau}{\pi} \left[\frac{3}{2} + \ln \frac{b}{\nu} \right] \quad (237)$$

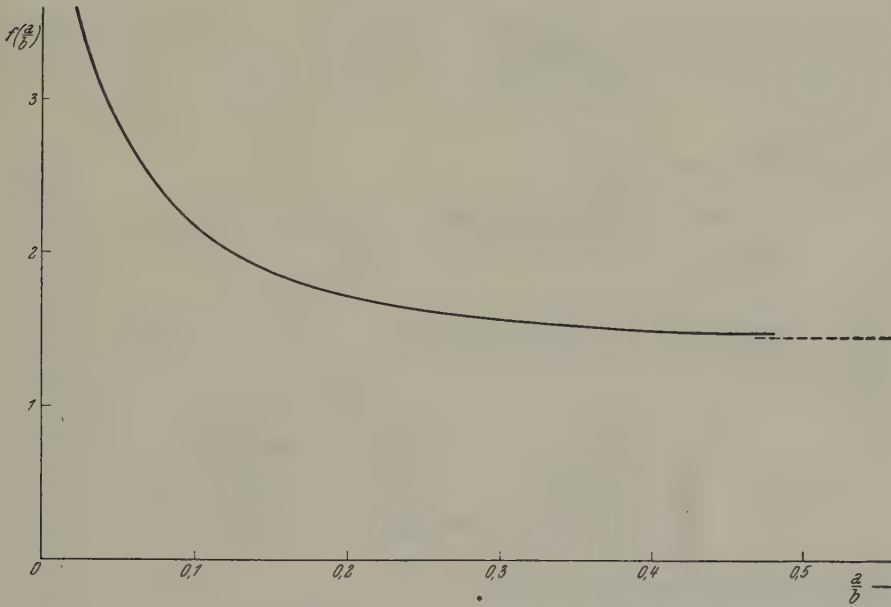


Abb. 16. Die Funktion $f\left(\frac{a}{b}\right)$

diejenige „ideelle“ Stirninduktivität, welche bei gedanklicher Entfernung aller vollkommen permeablen Teile unseres Modells verbleiben würde, so daß

$$\Delta L^{(St)} = L^{(St)} - L^{(St)'} = \Pi_0 \frac{\tau}{\pi} f\left(\frac{a}{b}\right) \quad (238)$$

den Einfluß der tatsächlich wirksamen ferromagnetischen Maschinenelemente quantitativ erfaßt; diese zusätzliche Induktivität nähert sich mit wachsendem Verhältnis $\frac{a}{b}$ rasch dem Grenzwert

$$\lim_{\frac{a}{b} \rightarrow \infty} \Delta L^{(St)} = \ln \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} \ln 2 \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 1,472. \quad (239)$$

2. Im Lichte des Ergebnisses (239) vereinfachen wir die geometrische Struktur des Stirnraumes durch die Grenzannahme

$$\frac{a}{b} \rightarrow \infty. \quad (240)$$

Zu Gl. (218) zurückkehrend, benutzen wir die für $\frac{a}{b} \gg 1$ gültigen Entwicklungen

$$\left. \begin{aligned} \cosh 2\pi \frac{a}{b} &= \frac{1}{2} e^{2\pi \frac{a}{b}} + \dots; & \sinh^2 \pi \frac{a}{b} &= \frac{1}{4} e^{2\pi \frac{a}{b}} + \dots; \\ \cosh^2 \pi \frac{a+d}{b} &= \frac{1}{4} e^{2\pi \frac{a}{b}} e^{2\pi \frac{d}{b}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

und erhalten

$$\frac{\sqrt[4]{\cosh 2\pi \frac{a}{b} \left[\sinh^2 \pi \frac{a}{b} + \cosh^2 \pi \frac{a+d}{b} \right]}}{\cosh \pi \frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2} e^{2\pi \frac{a}{b}} \frac{1}{4} e^{2\pi \frac{a}{b}} \left(1 + e^{2\pi \frac{d}{b}} \right)}}{\frac{1}{2} e^{\pi \frac{a}{b}}} + \dots \quad (242)$$

also

$$\lim_{\frac{a}{b} \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{\cosh 2\pi \frac{a}{b} \left[\sinh^2 \pi \frac{a}{b} + \cosh^2 \pi \frac{a+d}{b} \right]}}{\cosh \pi \frac{a}{b}} = \sqrt[4]{4 e^{\pi \frac{d}{b}} \cosh \pi \frac{d}{b}}. \quad (243)$$

Weiter bilden wir gemäß (219)

$$\lim_{\frac{a}{b} \rightarrow \infty} \gamma = \operatorname{cotgh} \pi \frac{d}{2b}; \quad \lim_{\frac{a}{b} \rightarrow \infty} \delta = \operatorname{cotgh} \pi \frac{d}{2b} - 1 \quad (244)$$

und damit

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\frac{a}{b} \rightarrow \infty} \sinh \eta_+ \sqrt{\cosh^2 \eta_+ + \operatorname{tg}^2 \xi_+ \sinh^2 \eta_+} &= \\ &= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{\cosh \pi \frac{d}{b} + \cosh \pi \frac{d}{2b}}}{\sqrt{\cosh \pi \frac{d}{b} - \cosh \pi \frac{d}{2b}}} \frac{\sqrt[4]{4 e^{-\pi \frac{d}{b}} \cosh \pi \frac{d}{b}}}{\sinh \pi \frac{d}{2b}}} \end{aligned} \right\} \quad (245)$$

Aus (243) und (245) schließen wir

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\frac{a}{b} \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{\sqrt[4]{\cosh 2\pi \frac{a}{b} \left[\sinh^2 \pi \frac{a}{b} + \cosh^2 \pi \frac{a+d}{b} \right]}}{\cosh \pi \frac{a}{b}} + \right. \\ \left. + \ln \left(\sinh \eta_+ \sqrt{\cosh^2 \eta_+ + \operatorname{tg}^2 \xi_+ \sinh^2 \eta_+} \right) \right] &= \\ &= \ln \frac{2 \sqrt{\cosh \pi \frac{d}{b}}}{\sinh \pi \frac{d}{2b}} \sqrt[4]{\frac{\sqrt{\cosh \pi \frac{d}{b} + \cosh \pi \frac{d}{2b}}}{\sqrt{\cosh \pi \frac{d}{b} - \cosh \pi \frac{d}{2b}}}} \equiv \\ &\equiv \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left[\left(1 + \operatorname{cotgh}^2 \pi \frac{d}{b} \right) \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{d}{b}}}{\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{d}{b} - 1}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

Mit Hilfe der in Abb. 17 dargestellten Funktion

$$g\left(\frac{d}{b}\right) = \ln \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} \ln \left[\left(1 + \operatorname{cotgh}^2 \pi \frac{d}{b} \right) \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{d}{b}} + 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 \pi \frac{d}{b}} - 1} \right] \quad (247)$$

resultiert also für die Induktivität $\Delta L^{(St)}$, welche sich zufolge der ferromagnetischen Elemente des Stirnraumes zu der ideellen „Luftinduktivität“ $L^{(St)}$ nach (237) addiert, der Ausdruck

$$\Delta L^{(St)} = \Pi_0 \frac{\tau}{\pi} g\left(\frac{d}{b}\right). \quad (248)$$

In ihm darf man häufig, gerade entgegen der Annahme (220), den Luftspalt d als eng im Verhältnis zur axialen Breite b des Stirnraumes betrachten, so daß

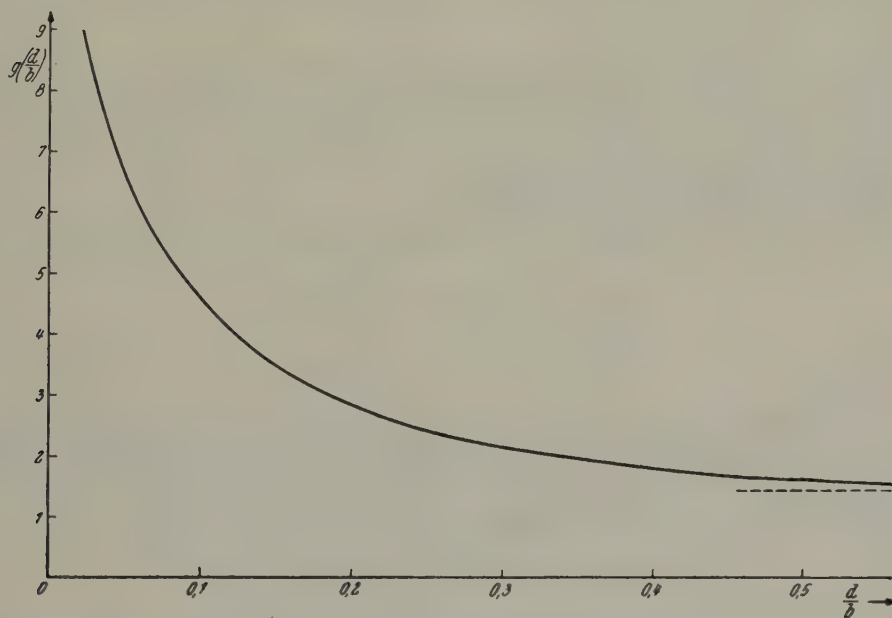


Abb. 17. Die Funktion $g\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\pi \frac{d}{b} \ll 1 \quad (249)$$

ausfällt; aus (247) entspringt dann für $\Delta L^{(St)}$ die einfache Näherungsformel

$$\Delta L^{(St)} = \Pi_0 \frac{\tau}{\pi} \ln 2 \left(\frac{b}{\pi d} \right)^2. \quad (250)$$

Ihr Bau läßt einen in der Regel sehr erheblichen Einfluß des Ferromagnetismus auf die Stirninduktivität voraussehen; insbesondere erweist sich der modellmäßig vielleicht zunächst naheliegende Grenzübergang zu verschwindender Weite des Luftspaltes als durchaus unzulässig.

Die Grundwelle des Windungskurzschlußstromes

Wir fassen (146) mit (237) und (248) zur Grundwelleninduktivität

$$L_1 = L_1^{(K)} + \lim_{\frac{a}{b} \rightarrow \infty} L^{(St)} = \frac{\mu_0}{\pi} \left[2l \left\{ \frac{\tau}{p\pi d} + \frac{3}{2} + \ln \frac{8d}{\pi v} \right\} + \tau \left\{ \frac{3}{2} + \ln \frac{b}{v} + g\left(\frac{d}{b}\right) \right\} \right] \quad (251)$$

zusammen. Obwohl diese Formel im Verein mit (40), (43), (47) und (50) für die Grundwellenamplitude des Windungskurzschlußstromes den zufolge (30) unschwer explizit berechenbaren Ausdruck

$$J_1 = 4\pi \frac{\sqrt{\gamma_1^{(p)} \gamma_1^{(p)*}}}{\left\{ \frac{\tau}{p\pi d} + \frac{3}{2} + \ln \frac{8d}{\pi v} \right\} + \frac{\tau}{2l} \left\{ \frac{3}{2} + \ln \frac{b}{v} + g\left(\frac{d}{b}\right) \right\}} \quad (252)$$

liefert, eignet sich dieser doch nicht zu einer unmittelbaren Beurteilung der mit dem Windungsschluß einhergehenden Gefahr; die gewünschte Einsicht erfordert vielmehr den Vergleich des Windungskurzschlußstromes mit dem sozusagen „normalen“, dreipoligen Dauerkurzschlußstrom $J^{(3)}$ der Maschine oder, genauer gesagt, mit dessen Grundwellenamplitude $J_1^{(3)}$.

Der Kürze halber beschränken wir uns auf eine Maschine mit der ganzen Zahl q von Nuten je Pol und Phase, deren jede die einheitliche Anzahl w in Reihe geschalteter Leiter enthält. Für den zeitlichen Verlauf der Grundwellen $J_R^{(3)}(t)$, $J_S^{(3)}(t)$, $J_T^{(3)}(t)$ der Dauerkurzschlußströme beziehentlich der Phasen R , S , T dürfen wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Ansätze

$$J_R^{(3)}(t) = J_1^{(3)} \sin \omega t, \quad (253)$$

$$J_S^{(3)}(t) = J_1^{(3)} \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right), \quad (254)$$

$$J_T^{(3)}(t) = J_1^{(3)} \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right) \quad (255)$$

wählen und die Meridianebene $\alpha = 0$ des ständerfesten Bezugssystems derart justieren, daß sie eine der p kongruenten Spulen der Phase R halbiert. Der längs der Ständerbohrung ausgebreitete Strombelag $A_R^{(3)} = A_R^{(3)}(\alpha, t)$ wird dann durch die Fouriersche Reihe

$$A_R^{(3)}(\alpha, t) = \frac{w J_R^{(3)}(t)}{v} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{R,n}^{(3)} e^{in p \alpha} \quad (256)$$

dargestellt, deren Koeffizienten $a_{R,n}^{(3)}$ sich aus

$$\left. \begin{aligned} a_{R,n}^{(3)} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{q'=0}^{q-1} \left[\begin{array}{cc} -\frac{\pi}{p} \frac{\left(1 - \frac{1+2q'}{q}\right) - 3\frac{v}{\tau}}{6} & -\frac{\pi}{q} \frac{\left(1 - \frac{1+2q'}{q}\right) - 3\frac{v}{\tau}}{6} + \frac{\pi}{p} \\ \int e^{-in p \alpha} d\alpha & - \int e^{-in p \alpha} d\alpha \\ -\frac{\pi}{p} \frac{\left(1 - \frac{1+2q'}{q}\right) + 3\frac{v}{\tau}}{6} & -\frac{\pi}{p} \frac{\left(1 - \frac{1+2q'}{q}\right) + 3\frac{v}{\tau}}{6} + \frac{\pi}{p} \end{array} \right] = \\ &= \frac{v}{2\tau} \frac{\sin n\pi \frac{v}{2\tau}}{n\pi \frac{v}{2\tau}} \sum_{q'=0}^{q-1} \left[e^{in \left(1 - \frac{1+2q'}{q}\right)} (1 - e^{-in\pi}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (257)$$

berechnen. Definiert man also den Wicklungsfaktor f_n mittels der geometrischen Reihe

$$\sum_{q'=0}^{p-1} e^{in \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{1+2q'}{q}\right)} = \frac{\sin n \frac{\pi}{6}}{\sin n \frac{\pi}{6} \frac{1}{q}} \equiv q \cdot f_n; \quad f_n = \frac{\sin n \frac{\pi}{6}}{q \sin n \frac{\pi}{6} \frac{1}{q}}, \quad (258)$$

so reduziert sich (257) auf die Formel der ungeradzahigen Harmonischen [$n = 2m + 1$]

$$a_{R, 2m+1}^{(3)} = \frac{wq}{\tau} \frac{\sin(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}}{(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}} f_{2m+1}; \quad -\infty < m < \infty, \quad (259)$$

während alle geradzahigen Harmonischen identisch verschwinden. Durch Restitution dieser Ergebnisse in (256) folgt mit Rücksicht auf (253)

$$A_R^{(3)}(\alpha, t) = \frac{wq}{\tau} J_1^{(3)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}}{(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}} f_{2m+1} \sin \omega t \cos(2m+1) p \alpha \quad (260)$$

oder, nach Aufspaltung der hier auftretenden stehenden Wellen in je zwei gegenläufige Drehfelder,

$$A_R^{(3)}(\alpha, t) = \frac{wq}{\tau} J_1^{(3)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}}{(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}} f_{2m+1} \left[\sin \{ \omega t + (2m+1) p \alpha \} + \sin \{ \omega t - (2m+1) p \alpha \} \right]. \quad (261)$$

Auf dem gleichen Wege findet man die Strombeläge $A_S^{(3)}(\alpha, t)$ und $A_T^{(3)}(\alpha, t)$, welche beziehentlich die Verteilung der Ströme $J_S^{(3)}(t)$ und $J_T^{(3)}(t)$ beschreiben:

$$A_S^{(3)}(\alpha, t) = \frac{wq}{\tau} J_1^{(3)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}}{(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}} f_{2m+1} \left[\sin \{ \omega t + (2m+1) p \alpha - \frac{4}{3} \pi (m+1) \} + \sin \{ \omega t - (2m+1) p \alpha + \frac{4}{3} \pi m \} \right] \quad (262)$$

$$A_T^{(3)}(\alpha, t) = \frac{wq}{\tau} J_1^{(3)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}}{(2m+1) \pi \frac{v}{2\tau}} f_{2m+1} \left[\sin \{ \omega t + (2m+1) p \alpha + \frac{4}{3} \pi (m+1) \} + \sin \{ \omega t - (2m+1) p \alpha - \frac{4}{3} \pi m \} \right]. \quad (263)$$

Aus (261), (262) und (263) resultiert der Strombelag

$$A^{(3)} = A^{(3)}(\alpha, t) = A_R^{(3)}(\alpha, t) + A_S^{(3)}(\alpha, t) + A_T^{(3)}(\alpha, t) \quad (264)$$

des dreipoligen Dauerkurzschlußstromes

$$A^{(3)}(\alpha, t) = \frac{3wq}{\tau} J_1^{(3)} \left[\frac{\sin \pi \frac{v}{2\tau}}{\pi \frac{v}{2\tau}} f_1 \sin(\omega t - p \alpha) + \frac{\sin 5 \pi \frac{v}{2\tau}}{5 \pi \frac{v}{2\tau}} f_5 \sin(\omega t + 5 p \alpha) + \frac{\sin 7 \pi \frac{v}{2\tau}}{7 \pi \frac{v}{2\tau}} f_7 \sin(\omega t - 7 p \alpha) + \dots \right]. \quad (265)$$

Hiernach annullieren sich zufolge Interferenz der je zusammenwirkenden Phasenwellen alle Drehfelder, deren Ordnungszahl $(2m+1)$ durch 3 teilbar ist. Von den verbleibenden Drehfeldern der Ordnungen 1, 5, 7, 11 ... begleitet lediglich das Grundfeld $[m=0]$ die mechanische Bewegung des Läufers, während sämtliche Oberfelder $[m>0]$ der Läuferoberfläche entlang wandern. Dieser grundlegenden kinematischen Alternative korrespondiert eine wesentlich unterschiedliche Feldstruktur der genannten Harmonischen: Nur die magnetischen Induktionslinien des Grundfeldes vermögen in das Läuferisen einzudringen, um sich in ihm zu schließen, dagegen werden die Induktionslinien der Oberfelder von den Kurzschlußströmen der Läuferleiter abgewiesen, so daß sie sich im Luftspalt zusammendrängen müssen. Auf Grund dieses Sachverhaltes entfällt der Hauptteil der Freien magnetischen Energie des Maschinenkernes auf das Grundfeld. Um diesen Anteil zu berechnen, bedienen wir uns des magnetischen Skalarpotentials φ_0 , welches innerhalb des Luftspaltes $[R_1 < r < R_2, 0 < \alpha < 2\pi]$ der Laplaceschen Gleichung unter der Läuferendbedingung

$$\varphi_0 = 0 \text{ für } r = R_1 \quad (266)$$

im Verein mit der aus (265) zu entnehmenden Ständerendbedingung

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} = \frac{3wq}{\tau} J_1^{(3)} \frac{\sin \pi \frac{\nu}{2\tau}}{\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_1 \sin(\omega t - p\alpha) \text{ für } r = R_2 \quad (267)$$

genügt:

$$\varphi_0 = \varphi_0(r, \alpha) = \frac{3wq}{\tau p} J_1^{(3)} R_2 \frac{\sin \pi \frac{\nu}{2\tau}}{\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_1 \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^p - \left(\frac{r}{R_1} \right)^{-p} - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^p + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-p} \right] \cos\{\omega t - p\alpha\}. \quad (268)$$

Es erregt an der Ständeroberfläche die radiale Induktionskomponente

$$B_{r,0} = -\Pi_0 \cdot \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right]_{r=R_2} = -\Pi_0 \frac{3wq}{\tau} J_1^{(3)} \frac{\sin \pi \frac{\nu}{2\tau}}{\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_1 \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^p + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^p - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-p} - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{-p} \right] \cos\{\omega t - p\alpha\}. \quad (269)$$

Mit Beachtung der geometrischen Relation $\frac{\pi R_2}{p} = \tau$ findet sich daher die Freie magnetische Grundfeldenergie je Polpaar des Maschinenkernes zu

$$\left. \begin{aligned} W_0^{(3)K} &= -\frac{1}{2} l R_2 \int_{-\frac{\pi}{p}}^{+\frac{\pi}{p}} [\varphi_0]_{r=R_2} \cdot B_{r,0} \cdot d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \Pi_0 [J_1^{(3)}]^2 \frac{l}{\pi} (3wq)^2 \left(\frac{\sin \pi \frac{\nu}{2\tau}}{\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_1 \right)^2 \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^p + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^p - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-p} - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{-p} \right] \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

Die nichtverschwindenden Oberfelder der Ordnungszahlen $n = (2m+1) > 1$ dagegen sind genetisch mit je einem magnetischen Skalarpotential φ_n verknüpft, welches im Luftspalt der Laplaceschen Gleichung unter den Randbedingungen

$$-\Pi_0 \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = 0 \text{ für } r = R_1 \quad (271)$$

und

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha} = \frac{3 w q}{\tau} J_1^{(3)} \frac{\sin n \pi \frac{\nu}{2 \tau}}{n \pi \frac{\nu}{2 \tau}} f_n \sin(\omega t \mp n p \alpha) \text{ für } r = R_2 \quad (272)$$

genügt, sofern man nur das Vorzeichen der in (272) eingehenden Phase $n p \alpha$ beziehentlich den in (265) explizit angegebenen harmonischen Komponenten des Ständerstrombelages anpaßt. Aus der durch diese Forderungen bis auf eine belanglose additive Konstante festgelegten Potentialfunktion

$$\varphi_n = \varphi_n(r, \alpha, t) = \frac{3 w q}{\tau n p} J_1^{(3)} R_2 \frac{\sin n \pi \frac{\nu}{2 \tau}}{n \pi \frac{\nu}{2 \tau}} f_n \frac{\left(\frac{r}{R_1}\right)^{np} + \left(\frac{r}{R_1}\right)^{-np}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{np} + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-np}} \cos\{\omega t \mp n p \alpha\} \quad (273)$$

berechnet man die von ihr an der Ständerbohrung erregte Radialkomponente der magnetischen Induktion

$$B_{r,n} = -\Pi_0 \frac{3 w q}{\tau} J_1^{(3)} \frac{\sin n \pi \frac{\nu}{2 \tau}}{n \pi \frac{\nu}{2 \tau}} f_n \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{np} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{np}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{np} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-np}} \cos\{\omega t \mp n p \alpha\}, \quad (274)$$

so daß das in Rede stehende Drehfeld je Polpaar des Maschinenkernes die Freie magnetische Energie

$$W_n^{(3)K} = \frac{1}{2} \Pi_0 [J_1^{(3)}]^2 \frac{l}{\pi} (3 w q)^2 \left(\frac{\sin n \pi \frac{\nu}{2 \tau}}{n \pi \frac{\nu}{2 \tau}} f_n \right)^2 \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{np} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{np}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{np} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-np}} \quad (275)$$

bindet.

Durch n' die mit 5 beginnende, „lückenhafte“ Folge 5, 7, 11, 13, 17, ... der ungeraden Zahlen mit Ausnahme der durch 3 teilbaren bezeichnend, erhalten wir somit für die gesamte Freie magnetische Energie des Luftspaltes den Ausdruck

$$W^{(3)K} = W_1^{(3)K} + \sum_{n'=5}^{\infty} W_{n'}^{(3)K} = \frac{1}{2} \Pi_0 [J_1^{(3)}]^2 \frac{l}{\pi} (3 w q)^2 \left\{ \left(\frac{\sin \pi \frac{\nu}{2 \tau}}{\pi \frac{\nu}{2 \tau}} f_1 \right)^2 \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^p + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^p}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^p - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^p} + \right. \\ \left. + \sum_{n'=5}^{\infty} \left(\frac{\sin n' \pi \frac{\nu}{2 \tau}}{n' \pi \frac{\nu}{2 \tau}} f_{n'} \right)^2 \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n'p} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n'p}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n'p} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-n'p}} \right\} \quad (276)$$

Definieren wir nunmehr die „Betriebskerninduktivität“ $L^{(K)}$ der dreiphasig-symmetrisch gespeisten Ständerwicklung durch die Relation

$$W^{(3)K} = \frac{1}{2} L^{(K)} [J_R^2(t) + J_S^2(t) + J_T^2(t)] = \frac{1}{2} L^{(K)} \frac{3}{2} [J_1^{(3)}]^2, \quad (277)$$

so liefert ihr Vergleich mit (276) die Formel

$$L^{(K)} = \frac{\Pi_0}{\pi} l \frac{2}{3} (3 w q)^2 \left\{ \left(\frac{\sin \pi \frac{\nu}{2 \tau}}{\pi \frac{\nu}{2 \tau}} f_1 \right)^2 \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^p + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^p}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^p - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^p} + \right. \\ \left. + \sum_{n'=5}^{\infty} \left(\frac{\sin n' \pi \frac{\nu}{2 \tau}}{n' \pi \frac{\nu}{2 \tau}} f_{n'} \right)^2 \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n'p} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n'p}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n'p} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-n'p}} \right\} \quad (278)$$

Im ersten Posten der rechter Hand auftretenden eckigen Klammer darf man wegen (101) den Grenzübergang (102) ausführen; sei überdies

$$\delta = R_2 - R_1 \ll R_2, \quad (279)$$

so gilt in hinreichender Genauigkeit

$$\left[\frac{\sin \pi \frac{\gamma}{2\tau} f_1}{\pi \frac{\gamma}{2\tau}} \right]^2 \frac{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^p + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^p}{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^p - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^p} \approx f_1^2 \frac{R_2}{p\delta} = f_1^2 \frac{\tau}{\pi\delta}. \quad (280)$$

Dagegen ist innerhalb der nach n' fortschreitenden Reihe der Grenzübergang (102) durchaus unstatthaft: Ihre Konvergenz beruht gerade auf dem Verhalten des Quadrats

$$\left[\frac{\sin n' \pi \frac{\nu}{2\tau}}{n' \pi \frac{\nu}{2\tau}} \right]^2 \text{ mit wachsendem } n' \text{ bei endlichem Werte des Verhältnisses } \frac{\nu}{2\tau}. \text{ Da indes}$$

die analytische Summierung der Reihe auf Schwierigkeiten stößt, muß man sie in der Regel numerisch ausführen, sofern man sich nicht mit einer bloßen Abschätzung begnügen will. Das Resultat einer solchen Berechnung als bekannt voraussetzend, setzen wir

$$\sum_{n'=5}^{\infty} \left[\frac{\sin n' \pi \frac{\nu}{2\tau}}{n' \pi \frac{\nu}{2\tau}} \right]^2 \frac{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n'p} - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{n'p}}{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n'p} + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{n'p}} = f_1^2 \sigma^{(K)}, \quad (281)$$

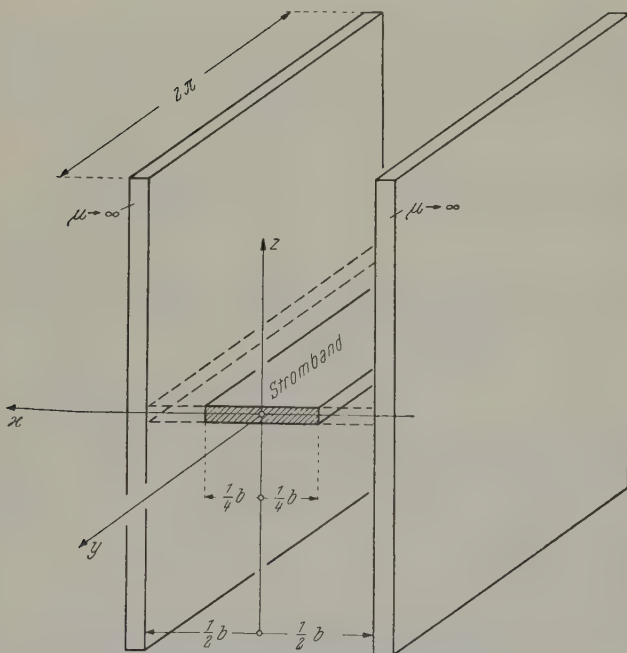


Abb. 18. Orientierung im zusammengeschobenen Stirnraum

wobei das Symbol $\sigma^{(K)}$ auf den Charakter der von ihm erfaßten Teilinduktivität als Streuung des Ständerkernes hinweisen mag; es steht uns frei, in diese Zahl auch die sogenannte Nutenstreuung einzuschließen. In der von (280) angezeigten Genauigkeit läßt sich dann (78) in die zusammenfassende Gestalt

$$L^{(K)} = \Pi_0 \frac{6}{\pi} l (w q f_1)^2 \left[\frac{\tau}{\pi\delta} + \sigma^{(K)} \right] \quad (282)$$

bringen.

Wir wenden uns nun zur Beschreibung desjenigen magnetischen Feldes, welches von dem symmetrischen Dreiphasensystem der Ströme J_R , J_S und J_T in den beiden

Stirnräumen der Maschine erregt wird. Im Anschluß an das Modell, welches wir der Berechnung des Windungskurzschlusses zugrunde gelegt haben, vereinigen wir die in Wahrheit durch den Kern räumlich getrennten Stirnwicklungen zu einem kontinuierlichen Stromband, welches in der Ebene $z=0$ des rechtshändigen Kartesischen

Bezugssystems x, y, z nach Abb. 18 den Streifen $|x| < \frac{1}{2} b$ bedeckt. Die Ebenen $|x| = b$ repräsentieren, wie früher, die axialen Flanken der Maschine, welche als solche mit der ideellen, vollkommenen Permeabilität $\mu \rightarrow \infty$ ausgestattet werden müssen; dagegen erscheint es hier gerechtfertigt, auf Grund der Abgeschlossenheit des Stromsystems in den vereinigten Stirnräumen sowohl deren periphere Begrenzung außer acht zu lassen wie auch von dem Einfluß des ferromagnetischen Kernes auf die Struktur des Stirnfeldes abzusehen. In Einklang mit diesen vereinfachenden Annahmen haben wir ein magnetisches Skalarpotential $\varphi = \varphi(x, y, z)$ aufzusuchen, welches im Raume $|x| < b$ mit Ausnahme des durchströmten Gebietes der Ebene $z = 0$ der Laplaceschen Gleichung unter den Randbedingungen

$$\varphi = 0 \text{ für } x = \pm b \quad (283)$$

genügt. Um nunmehr die zusätzlichen Randbedingungen zu formulieren, welche dem Potential durch das Stromband aufgezwungen werden, erweitern wir dessen reales Existenzgebiet $|x| < \frac{1}{2} b$ formal zu dem vollen Streifen $|x| < b$ der Ebene $z = 0$, wobei die Gebiete $\frac{1}{2} b < |x| < b$ tatsächlich stromfrei bleiben. Die beziehentlich achsenparallelen Komponenten A_x und A_y des genannten Streifens genügen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0. \quad (284)$$

Wir verwandeln sie in eine Identität, indem wir innerhalb des Streifens die skalare Durchflutungsfunktion

$$D = D(x, y) \quad (285)$$

als „eingeprägte“ Struktur des Strombandes einführen, aus welcher jene Strombelagskomponenten durch die Operationsvorschrift

$$A_x = \frac{\partial D}{\partial y}; \quad A_y = -\frac{\partial D}{\partial x} \quad (286)$$

hervorgehen. Die Aussagen

$$-\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_{z=+0} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_{z=-0} = A_y; \quad -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_{z=+0} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_{z=-0} = -A_x, \quad (287)$$

welche das Durchflutungsgesetz über den Sprung der magnetischen Feldstärke am Träger des Flächenstromes liefert, werden dann gleichzeitig durch die Unstetigkeit

$$\varphi_{z=+0} - \varphi_{z=-0} = D \quad (288)$$

des Potentials φ befriedigt.

Im Einklang mit der Kinematik (265) des dreiphasig-symmetrischen Strombelages im Ständerkern der Maschine wählen wir für die Durchflutungsfunktion der zusammengeschobenen Stirnköpfe den Ansatz

$$D = \frac{3wq}{\pi} J_1^{(3)} \cos \pi \frac{x}{b} \left[\frac{\sin \pi \frac{y}{2\tau}}{\pi \frac{y}{2\tau}} f_1 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} y \right) - \frac{1}{5} \frac{\sin 5\pi \frac{y}{2\tau}}{5\pi \frac{y}{2\tau}} f_5 \cos \left(\omega t + 5 \frac{\pi}{\tau} y \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \frac{\sin 7\pi \frac{y}{2\tau}}{7\pi \frac{y}{2\tau}} f_7 \cos \left(\omega t - 7 \frac{\pi}{\tau} y \right) + \dots \right]; \quad |x| < \frac{1}{2} b \\ D = 0 \quad \frac{1}{2} b < |x| < b. \quad (289)$$

Wir erweitern seine Gültigkeit auf den gesamten Wertevorrat von x mittels der Fourierschen Reihe

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \cos(2m+1) \pi \frac{x}{2b} \quad (290)$$

der Funktion

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \cos \pi \frac{x}{b}; & |x| < \frac{1}{2} b \bmod 2b \\ f(x) &= 0; & \frac{1}{2} b < |x| < \frac{3}{2} b \bmod 2b \\ f(x) &= -\cos \pi \frac{x}{b}; & \frac{3}{2} b < |x| < \frac{5}{2} b \bmod 2b, \end{aligned} \right\} \quad (291)$$

so daß für die Koeffizienten δ_{2m+1} die Formel

$$\delta_{2m+1} = -\frac{2 \cos \frac{\pi}{2} \frac{2m+1}{2}}{\pi \left(\frac{2m+1}{2} \right)^2 - 1} \quad (292)$$

resultiert; die folgende Tabelle enthält ihre hiernach berechneten numerischen Werte.

m	$2m+1$	δ_{2m+1}
0	1	0,600
1	3	0,360
2	5	0,085
3	7	-0,040
4	9	-0,0234
5	11	+0,0164

(293)

Zu der nunmehr für alle x und y durch

$$D = \frac{3wq}{\pi} J_1^{(3)} \left[\frac{\sin \pi \frac{\nu}{2\tau}}{\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_1 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} y \right) - + \dots \right] \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \cos(2m+1) \pi \frac{x}{2b} \quad (294)$$

analytisch darstellbaren Durchflutungsfunktion zurückkehrend, finden wir also mit Rücksicht auf die Randbedingung (288) im Verein mit der Forderung

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi \rightarrow 0 \quad (295)$$

als Lösung der Laplaceschen Gleichung das Potential

$$\left. \begin{aligned} \varphi = & \pm \frac{1}{2} \frac{3wq}{\pi} J_1^{(3)} \left[\frac{\sin \pi \frac{\nu}{2\tau}}{\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_1 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} y \right) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \cos(2m+1) \pi \frac{x}{2b} e^{\mp \frac{\pi}{\tau} z} \sqrt{1 + \left(\frac{2m+1}{2} \right)^2 \frac{\tau^2}{b^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{5} \frac{\sin 5\pi \frac{\nu}{2\tau}}{5\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_5 \cos \left(\omega t - 5 \frac{\pi}{\tau} y \right) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \cos(2m+1) \pi \frac{x}{2b} e^{\mp \frac{\pi}{\tau} z} \sqrt{25 + \left(\frac{2m+1}{2} \right)^2 \frac{\tau^2}{b^2}} + \dots \right] \end{aligned} \right\}$$

Es entwickelt in der Ebene $z=0$ die parallel der z -Achse weisende Induktionskomponente

$$= \frac{\pi}{2} \frac{3wq}{\pi} J_1^{(3)} \left[\frac{\sin \pi \frac{\nu}{2\tau}}{\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_1 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} y \right) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \frac{\pi}{\tau} \sqrt{1 + \left(\frac{2m+1}{2} \right)^2 \frac{\tau^2}{b^2}} \cos(2m+1) \pi \frac{x}{2b} - \right. \\ \left. - \frac{1}{5} \frac{\sin 5\pi \frac{\nu}{2\tau}}{5\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_5 \cos \left(\omega t - 5 \frac{\pi}{\tau} y \right) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \frac{\pi}{\tau} \sqrt{25 + \left(\frac{2m+1}{2} \right)^2 \frac{\tau^2}{b^2}} \cos(2m+1) \pi \frac{x}{2b} + \dots \right] \quad (297)$$

so daß das vereinigte Stirnfeld je Polpaar die Freie magnetische Energie

$$W = \frac{1}{2} \Pi_0 \left(\frac{3wq}{\pi} J_1^{(3)} \right)^2 \left[\left[\frac{\sin \pi \frac{\nu}{2\tau}}{\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_1 \right]^2 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \sqrt{b^2 + \left(\frac{2m+1}{2} \right)^2 \tau^2} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\sin 5\pi \frac{\nu}{2\tau}}{5\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_5 \right]^2 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \sqrt{b^2 + \left(\frac{2m+1}{2} \right)^2 \left(\frac{\tau}{5} \right)^2} + \dots \right] \quad (298)$$

bindet. Man entnimmt dieser Gleichung die Betriebsinduktivität $L^{(St)}$ je Polpaar der vereinigten Stirnwicklungen

$$L^{(St)} = \frac{2}{3} \frac{W}{[J_1^{(3)}]} = \\ = \Pi_0 \frac{3}{\pi} b (wq)^2 \left[\left[\frac{\sin \pi \frac{\nu}{2\tau}}{\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_1 \right]^2 \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \sqrt{1 + \left(\frac{2m+1}{2} \frac{\tau}{b} \right)^2} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\sin 5\pi \frac{\nu}{2\tau}}{5\pi \frac{\nu}{2\tau}} f_5 \right]^2 \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \sqrt{1 + \left(\frac{2m+1}{2} \frac{\tau}{5b} \right)^2} + \dots \right] \quad (299)$$

Unter erneuter Berufung auf (101) und (102) dürfen wir im ersten Posten der eckigen Klammer den Sinus mit seinem Argument vertauschen. Setzen wir überdies abkürzend

$$h\left(\frac{\tau}{b}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \sqrt{1 + \left(\frac{2m+1}{2} \frac{\tau}{b} \right)^2} \quad (300)$$

und

$$f_1^2 \sigma^{(St)} = \sum_{n'=0}^{\infty} \left[\frac{\sin n' \pi \frac{\nu}{2\tau}}{n' \pi \frac{\nu}{2\tau}} f_{n'} \right]^2 \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{2m+1} \sqrt{1 + \left(\frac{2m+1}{2} \frac{\tau}{n'b} \right)^2}, \quad (301)$$

so reduziert sich (299) auf

$$L^{(St)} = \Pi_0 \frac{3}{\pi} b (w q f_1)^2 \left[h \left(\frac{\tau}{b} \right) + \sigma^{(St)} \right]. \quad (302)$$

Nach Zusammenfassung von (282) und (302) resultiert für die Betriebsinduktivität L des dreiphasig-symmetrisch durchströmten Ständers die Formel

$$L = L^{(K)} + L^{(St)} = \Pi_0 \frac{6}{\pi} (w q f_1)^2 \left\{ l \left[\frac{\tau}{\pi \delta} + \sigma^{(K)} \right] + \frac{1}{2} b \left[h \left(\frac{\tau}{b} \right) + \sigma^{(St)} \right] \right\}. \quad (303)$$

Nun mißt

$$\Phi_1^{(3)} = \Phi_1^{(p)} w q f_1 \quad (304)$$

die Grundwellenamplitude des primären magnetischen Induktionsflusses, welcher je Polpaar mit jeder der drei Phasenwicklungen verkettet ist. Mit Rücksicht auf (40) findet man somit für die Amplitude des dreipoligen Dauerkurzschlußstromes die Angabe

$$J_1^{(3)} = \frac{4 \pi}{w q f_1} \frac{\sqrt{\gamma_1^{(p)} \gamma_1^{(p)*}}}{\left[\frac{3 \tau}{\pi \delta} + \sigma^{(K)} \right] + \frac{3}{2} \frac{b}{l} \left[h \left(\frac{\tau}{b} \right) + \sigma^{(St)} \right]}. \quad (305)$$

Wir sind am Ziel: Der Vergleich von (252) mit (305) liefert die Relation

$$\frac{J_1}{J_1^{(3)}} = w q f_1 \frac{\frac{3 \tau}{\pi \delta} + \sigma^{(K)} + \frac{3}{2} \frac{b}{l} \left[h \left(\frac{\tau}{b} \right) + \sigma^{(St)} \right]}{\frac{\tau}{p \pi \delta} + \frac{3}{2} + \ln \frac{8 d}{\pi \nu} + \frac{\tau}{2 l} \left[\frac{3}{2} + \ln \frac{b}{\nu} + g \left(\frac{d}{b} \right) \right]}. \quad (306)$$

(Eingegangen am 25. September 1958)

Berechnung der komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen als Ergänzung der Methode von Graeffe

Von O. Fritscher, Wien

Zusammenfassung: Mit der Methode von Graeffe können die absoluten Beträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen berechnet werden. Zur Bestimmung der Argumente komplexer Wurzeln ist ein Ergänzungsverfahren notwendig.

Das hier dargestellte Ergänzungsverfahren ist — im Gegensatz zu den bisher gebräuchlichen Methoden — auch bei Vorliegen einer größeren Zahl von Wurzeln gleichen Betrages uneingeschränkt anwendbar. Es beruht darauf, daß zu jedem der mit der Graeffe-Methode gefundenen Wurzelbeträge zwei Gleichungen für eine geeignete Funktion des Arguments gebildet werden können, die gleichzeitig erfüllt sein müssen. Aus ihrem größten gemeinsamen Teiler werden dann die Argumente berechnet.

Sind die Koeffizienten der gegebenen Gleichung sämtlich reell, so führt die Rechnung auf zwei reziproke Gleichungen, so daß die Bestimmung des gemeinsamen Teilers stark abgekürzt werden kann. In etwas abgeänderter Form ermöglicht das Verfahren auch die Auflösung von Gleichungen mit komplexen Koeffizienten.

Schließlich wird noch gezeigt, wie die im Laufe der Rechnung eventuell auftretenden Rundungsfehler berichtigt werden können.

Das im folgenden beschriebene Verfahren zur numerischen Auflösung algebraischer Gleichungen ist eine Ergänzung der Methode von Graeffe¹, mit der bekanntlich die absoluten Beträge der Wurzeln ohne vorherige Kenntnis von Näherungswerten mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden können. Gleichzeitig wird auch die Anzahl

¹ R. Zurmühl: Praktische Mathematik, 2. Aufl. 1957, S. 62—79.

der Wurzeln von gleichem Betrage festgestellt, die wir in diesem Aufsatz zur Abkürzung als Vielfältigkeit der Wurzeln bezeichnen wollen.

Eine Schwäche des Graeffe-Verfahrens liegt aber in den Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Argumente komplexer Wurzeln. Zwar wurden dafür verschiedene Ergänzungsverfahren entwickelt, unter anderen die Methode von Brodetsky-Smeal² und eine von Miroslav Fiedler angegebene Modifikation dieses Verfahrens³. Diese Methoden liefern im allgemeinen sehr gute Resultate, ihre Anwendbarkeit ist aber an Voraussetzungen geknüpft, die — bei Vorliegen von Wurzeln mit höherer Vielfältigkeit als 2 — nicht immer erfüllt sind.

Im Gegensatz dazu ist die hier angegebene Methode ausnahmslos immer anwendbar, auch für Gleichungen mit komplexen Koeffizienten, und hat gegenüber den genannten Methoden den Vorzug, daß die Durchrechnung eines zweiten, dem Graeffe-Verfahren ähnlichen Iterationsverfahrens nicht notwendig ist.

Das Verfahren beruht auf der Tatsache, daß komplex konjugierte Zahlen vom Betrage 1 zueinander reziprok sind. Mit Hilfe dieses Satzes und unter Benützung der durch das Graeffe-Verfahren gelieferten Wurzelbeträge kann man aus der gegebenen Gleichung eine zweite bilden, die mit ihr sämtliche Wurzeln von einem bestimmten Betrage gemeinsam hat. Man berechnet dann mittels des Euklidischen Algorithmus, also durch ein rationales Rechenverfahren, den größten gemeinsamen Teiler dieser beiden Gleichungen und kann daraus die Argumente der zugehörigen Wurzeln bestimmen.

Durch geeignete Umformungen und die Substitution neuer Unbekannten kann die Rechenarbeit erheblich abgekürzt werden. Sind die Koeffizienten der gegebenen Gleichung sämtlich reell, so wird dadurch der Grad der Gleichungen, deren gemeinsamer Teiler zu bestimmen ist, auf die Hälfte herabgesetzt. Hat die gegebene Gleichung aber auch komplexe Koeffizienten, so kann wenigstens erreicht werden, daß der Algorithmus zwischen reellen Gleichungen abläuft.

Es soll nun der Gang der Rechnung für beide Fälle gesondert beschrieben werden:

I. Gleichungen mit reellen Koeffizienten

Sind die Koeffizienten der Gleichung $f(x)=0$ sämtlich reell, so müssen alle Wurzeln von der Vielfältigkeit 1 reell sein. Ihr Vorzeichen kann durch versuchsweises Einsetzen mittels des Horner-Schemas ermittelt werden. Gleichzeitig wird die Gleichung durch den zugehörigen linearen Teiler dividiert. Man erhält so schließlich eine Gleichung, deren Wurzeln mindestens zweifältig sind.

Es sei nun r der größte oder kleinste Betrag dieser Wurzeln. Wir ersetzen in der gegebenen Gleichung x durch $r \cdot u$ und erhalten so eine Gleichung $g(u)=0$, deren Wurzeln vom Betrage 1 zu bestimmen sind.

Wir wollen zunächst feststellen, ob $f(x)$ reelle Wurzeln vom Betrage r hat, das heißt, ob $g(u)=0$ durch die Werte $+1$ oder -1 befriedigt wird. Das kann nur dann der Fall sein, wenn die Summen der Koeffizienten von $g(u)$ mit geradem und ungeradem Index dem Betrage nach gleich sind. Falls dies zutrifft, dividieren wir $g(u)$ durch die gefundenen Teiler $u-1$ oder $u+1$, nötigenfalls auch mehrmals, bis wir eine Gleichung erhalten, die reelle Wurzeln vom Betrage 1 nicht mehr besitzt.

Da die Koeffizienten von $g(u)$ reell sind, muß nach dem früher angegebenen Satz

² S. Brodetsky und G. Smeal: On Graeffe's method for complex roots of algebraic equations. Proc. Cambr. Phil. Soc. Vol. 22, S. 83—87 (1924).

³ Miroslav Fiedler: Über das Graeffesche Verfahren. Czechoslovakisches Mathematisches Journal 5, 80 (1955); Numerische Lösung algebraischer Gleichungen mit sämtlichen Wurzeln von fast demselben absoluten Betrag. Aplikace Matematiky 1 (1956), Prag.

zu jedem u vom Betrage 1, das diese Gleichung befriedigt, auch die dazu reziproke Größe der Gleichung genügen. Diese Wurzeln müssen daher auch Wurzeln der Gleichung $g(u) = 0$ sein, die aus $g(u)$ hervorgeht, wenn man die Reihenfolge der Koeffizienten umkehrt. Andere Wurzeln aber können die beiden Gleichungen nicht gemeinsam haben, da bei dem gewählten Wert von r die Wurzeln der einen dem Betrage nach nicht kleiner, die der anderen nicht größer als 1 sind.

Der größte gemeinsame Teiler von $g(u)$ und $\bar{g}(u)$ ist auch größter gemeinsamer Teiler der beiden reziproken Gleichungen:

$$g_1(u) = g(u) + \bar{g}(u) = 0 \quad \text{und} \quad g_2(u) = g(u) - \bar{g}(u) = 0.$$

Ist der Grad der Funktion g_1 ungerade, so ist sie durch $u + 1$ teilbar. Die Funktion g_2 ist jedenfalls durch $u - 1$ teilbar; ist sie von geradem Grad, dann außerdem durch $u + 1$. Da 1 und -1 nicht mehr zu den gemeinsamen Wurzeln von g_1 und g_2 gehören, dürfen wir durch diese Teiler dividieren und erhalten so zwei reziproke Gleichungen von geradem Grade, in denen die von der Mitte gleich weit entfernten Koeffizienten auch dem Vorzeichen nach gleich sind.

In diese Gleichungen substituieren wir nun in bekannter Weise die neue Unbekannte

$$v = u + \frac{1}{u}$$

und erhalten so zwei Gleichungen $h_1(v) = 0$ und $h_2(v) = 0$, wobei der Grad auf die Hälfte herabgesetzt wird. Dann bestimmen wir den größten gemeinsamen Teiler $h(v)$ dieser beiden Gleichungen und berechnen daraus v .

Die Auflösung der Gleichung $h(v) = 0$ bereitet keine Schwierigkeiten, da ihre Wurzeln sämtlich reell sind. Sie ist übrigens in den meisten Fällen linear.

Jedem Wert von v entspricht ein komplexes Wurzelpaar bzw. ein quadratischer Teiler von $f(x)$ von der Form:

$$x^2 - v \cdot r \cdot x + r^2.$$

Nach Division durch diese Teiler wird das Verfahren mit dem nächsten Wurzelbetrag wiederholt, bis alle Wurzeln gefunden sind.

Sind nur mehr zwei Wurzelbeträge übrig, von denen einer die Vielfältigkeit 2 hat, so kann $h(v)$ aus $g_2(u)$ allein abgeleitet werden, so daß der Euklidische Algorithmus entfällt.

II. Gleichungen mit komplexen Koeffizienten

Wenn die Koeffizienten der gegebenen Gleichung nicht sämtlich reell sind, können die Argumente der Wurzeln in folgender Weise bestimmt werden:

Es sei r der größte oder kleinste Betrag der Wurzeln. Wir führen in die Gleichung eine neue Unbekannte w ein nach der Formel:

$$x = r \cdot \frac{1 + wi}{1 - wi}$$

und erhalten so nach Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner eine Gleichung von der Form:

$$g(w) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n c_{j,k} \cdot a_j \cdot r^j \cdot (wi)^k = 0,$$

wobei a_j der Koeffizient von x^j in der gegebenen Gleichung ist.

Die Koeffizienten $c_{j,k}$ bilden eine quadratische Matrix, die nach folgenden Regeln gebildet werden kann:

1. Für die Glieder der 0-ten Zeile gilt:

$$c_{0,k} = (-1)^k \cdot \binom{n}{k}.$$

2. Die Glieder der 0-ten Kolonne $c_{j,0}$ sind sämtlich gleich 1.

3. Die übrigen Glieder der Matrix erhält man der Reihe nach durch Addition des darüberstehenden, des links danebenstehenden und des schief links darüberstehenden Gliedes:

$$c_{j,k} = c_{j-1,k} + c_{j,k-1} + c_{j-1,k-1}.$$

Zum Beweise beachte man, daß

$$\sum_{k=0}^n c_{j,k} \cdot (wi)^k = (1 + wi)^j \cdot (1 - wi)^{n-j}$$

ist. Für $j=0$ folgt daraus die erste Regel. Ferner ist:

$$(1 + wi) \cdot \sum_{k=0}^n c_{j-1,k} (wi)^k = (1 - wi) \cdot \sum_{k=0}^n c_{j,k} \cdot (wi)^k.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von (wi) folgen daraus die zweite und dritte Regel.

Nach diesen Regeln erhält man zum Beispiel für $n=6$ die Matrix:

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & -5 & -4 & -1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Die früher angegebene Beziehung zwischen x und w stellt eine Abbildung des Kreises mit dem Radius r um den Nullpunkt auf die reelle Achse dar. Jedem x vom Betrage r entspricht daher ein reeller Wert von w und es ist

$$w = \tan \frac{\varphi}{2},$$

wobei φ das Argument von x ist. Den reellen Werten $+r$ und $-r$ von x entsprechen die Werte 0 und ∞ von w . Alle x , deren Betrag nicht gleich r ist, werden auf komplexe Werte von w abgebildet. Da r nach Voraussetzung der größte oder kleinste Betrag der Wurzeln von $f(x)$ ist, liegen die übrigen Wurzeln sämtlich innerhalb oder sämtlich außerhalb des Kreises mit dem Radius r . Daher müssen die komplexen Wurzeln von $g(w)$ alle auf derselben Seite der reellen Achse liegen.

Die Gleichung $g(w)=0$ hat daher mit der zu ihr komplex konjugierten Gleichung nur die reellen Wurzeln gemeinsam. Der größte gemeinsame Teiler $h(w)$ dieser beiden Gleichungen ist aber auch größter gemeinsamer Teiler der Funktionen $h_1(w)$ und $h_2(w)$, die aus $g(w)$ durch Zerlegung in den reellen und imaginären Bestandteil hervorgehen. Wir bestimmen diesen gemeinsamen Teiler, berechnen daraus w und erhalten die zugehörigen Werte von x nach der Formel:

$$x = r \cdot \frac{1 - w^2 + 2wi}{1 + w^2}.$$

Nach Division der gegebenen Gleichung durch die entsprechenden linearen Teiler wird das Verfahren für den nächsten Wurzelbetrag fortgesetzt, bis alle Wurzeln gefunden sind.

III. Korrektur von Rundungsfehlern

Bei der Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers können infolge der unvermeidlichen Rundungen kleine Ungenauigkeiten auftreten, so daß der Algorithmus nicht genau aufgeht. Da aber nach den Ergebnissen des Graeffe-Verfahrens die Vielfältigkeit einer jeden Wurzel und damit auch der Grad des größten gemeinsamen Teilers schon vorher bekannt ist, kann man die Rechnung abbrechen, sobald dieser Grad erreicht ist, und erhält so jedenfalls gute Näherungswerte für die Wurzeln, an denen bei der anschließenden Division der Gleichung durch die zugehörigen Teiler nach dem Horner-Schema die notwendigen Korrekturen vorgenommen werden können.

Unterscheiden sich die Beträge mehrerer Wurzeln sehr wenig voneinander, so müßten zur Erreichung der vorgeschriebenen Genauigkeit nicht nur sehr viele Schritte des Graeffe-Verfahrens durchgerechnet werden, sondern es können sich auch Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Argumente ergeben. In solchen Fällen ist es zweckmäßiger, das Graeffe-Verfahren schon früher abzubrechen, so daß diese Wurzeln zu einer gemeinsamen Vielfältigkeit zusammengefaßt bleiben. Für diese bestimmt man die Argumente und erhält gute Näherungswerte als Ausgangspunkt für die Anwendung des Horner-Schemas.

Sind mehrere Wurzeln selbst nahezu gleich, so ist das Horner-Schema für die Berechnung der Korrekturen wenig geeignet. Es empfiehlt sich dann, eine neue Unbekannte y nach der Formel

$$x = x_0 + \frac{1}{y}$$

einzuführen, wobei x_0 den mehrfachen Näherungswert bedeutet, und die Gleichung mit der hier beschriebenen Modifikation des Graeffe-Verfahrens nach y aufzulösen, wobei aber nur die betragslich größten Werte von y von Interesse sind.

Mit dem vorliegenden Verfahren kann somit die numerische Lösung aller algebraischen Gleichungen mit beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden. Die Methode erscheint auch für die Verwendung in programmgesteuerten Rechenanlagen geeignet, zumal da in keiner Phase des Rechnungsganges eine schätzungsweise Annahme von Näherungswerten erforderlich ist.

Es folgen noch einige Rechenbeispiele zur Erläuterung des Verfahrens.

Beispiel 1.

$$f(x) = x^6 + 5x^4 - 7x^2 - 16x + 27 = 0$$

Das Graeffe-Verfahren ergibt nach 6 Schritten je zwei Wurzeln mit den Beträgen:

$$2,60277 \quad 1,62557 \quad \text{und} \quad 1,22812$$

Ersetzen wir x durch $2,60277 \cdot u$, so erhalten wir die Gleichung $g(u) = 0$ mit den Koeffizienten:

$$g(u) \equiv 310,890 \quad 0, \quad 229,461 \quad 0, \quad -47,421 \quad -41,644 \quad -27,$$

Reelle Wurzeln vom Betrag 1 sind nicht vorhanden. Wir bilden nun:

$$g_1(u) \equiv 337,890 \quad -41,644 \quad 182,040 \quad 0, \quad 182,040 \quad -41,644 \quad 337,890 \\ -1013,670 \quad +83,288$$

$$h_1(v) \equiv 337,890 \quad -41,644 \quad -831,630 \quad 83,288$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 g_2(u) \equiv & 283,890 & 41,644 & 276,882 & 0, & -276,882 & -41,644 & -283,890 \\
 & & & + 283,890 & + 41,644 & + 560,772 & + 41,644 & + 283,890 \\
 \hline
 & 283,890 & 41,644 & 560,772 & 41,644 & 283,890 & & \\
 & & & - 567,780 & & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$h_2(v) \equiv 283,890 \quad 41,644 \quad - \quad 7,008 \text{ oder normiert:}$$

$$\begin{array}{rrr}
 1, & 0,14669 & - \quad 0,024686 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Wir bestimmen nun den größten gemeinsamen Teiler von $h_1(v)$ und $h_2(v)$:

$$(+337,890 \quad -41,644 \quad -831,630 \quad +83,288) : (+1 \quad +0,14669 \quad -0,024686) =$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 \pm 337,890 & \pm 49,565 & \mp & 8,341 & & = (\quad +337,890 \quad -91,209) \\
 \hline
 \end{array}$$

$$-91,209 \quad -823,289 \quad +83,288$$

$$\mp 91,209 \quad \mp 13,379 \quad \pm 2,252$$

$$\begin{array}{rr}
 -809,910 & +81,036 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Daraus folgt: $v = +0,100056$

und als erster Teiler von $f(x)$:

$$x^2 - 0,26042 \cdot x + 6,77438$$

Die Division von $f(x)$ durch diesen Teiler liefert als Quotienten:

$$f_1(x) \equiv x^4 + 0,26042 \cdot x^3 - 1,70654 \cdot x^2 - 2,20858 \cdot x + 3,98560$$

Ersetzt man darin x durch $1,62557 \cdot u$, so erhält man eine Gleichung für u mit den Koeffizienten:

$$6,98282 \quad 1,11866 \quad -4,50955 \quad -3,59020 \quad 3,98560$$

Auch diese Gleichung hat keine reellen Wurzeln vom Betrage 1. Für die Berechnung von v benötigen wir jetzt nur $g_2(u)$:

$$2,99722 \quad 4,70886 \quad 0, \quad -4,70886 \quad -2,99722$$

$$2,99722 \quad 4,70886 \quad 2,99722$$

$$\begin{array}{rrr}
 2,99722 & 4,70886 & 2,99722 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Daraus folgt: $v = -1,57107$

und als zweiter Teiler von $f(x)$:

$$x^2 + 2,55390 \cdot x + 2,64251$$

Die Division von $f_1(x)$ durch diesen Teiler liefert den dritten Teiler:

$$x^2 - 2,29348 \cdot x + 1,50827$$

Beispiel 2.

$$f(x) \equiv x^6 - 2x^5 + 11x^4 - 15x^3 + 46x^2 - 35x + 50 = 0$$

Das Graeffe-Verfahren zeigt nach 6 Schritten, daß diese Gleichung

vier Wurzeln vom Betrage 2,23607 und

zwei Wurzeln vom Betrage 1,41421 hat.

Ersetzen wir x durch $2,23607 \cdot u$, so erhalten wir die Gleichung $g(u) = 0$ mit den Koeffizienten:

$$g(u) \equiv 125, \quad -111,8035 \quad 275, \quad -167,7053 \quad 230, \quad -78,2625 \quad 50,$$

Reelle Wurzeln vom Betrage 1 sind nicht vorhanden. Für die Bestimmung von v benötigen wir nur $g_2(u)$:

$$\begin{array}{r}
 75, -33,541 \quad 45, \quad 0, \quad -45, \quad 33,541 -75, \\
 \quad \quad \quad + 75, -33,541 \quad 120, -33,541 +75, \\
 \hline
 75, -33,541 \quad 120, -33,541 \quad 75, \\
 \quad \quad \quad -150, \\
 \hline
 75, -33,541 - 30, \quad \text{oder} \\
 \hline
 75 \cdot v^2 - 33,541 \cdot v - 30 = 0
 \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\begin{array}{l}
 v_1 = 0,894425 \quad 2,23607 \cdot v_1 = 2 \\
 v_2 = -0,447215 \quad 2,23607 \cdot v_2 = -1
 \end{array}$$

Die Teiler lauten also:

$$x^2 - 2x + 5 \quad \text{und} \quad x^2 + x + 5$$

Die Division von $f(x)$ durch diese Teiler ergibt den dritten Teiler:

$$x^2 - x + 2$$

Beispiel 3.

$$x^4 + (3 - 13i)x^3 - (32 + 19i)x^2 + (44 - 90i)x + (120 + 50i) = 0$$

Das Graeffe-Verfahren ergibt nach 3 Schritten je zwei Wurzeln mit den Beträgen:

$$8,06233 \quad \text{und} \quad 1,41421$$

Zuerst sollen die zu dem Betrag 8,06233 gehörigen Wurzeln bestimmt werden. Zur Berechnung von $g(w)$ dient folgende Tabelle:

j	$a_j \cdot r^j$	1	wi	$(wi)^2$	$(wi)^3$	$(wi)^4$
0	+ 120, + 50, i	1	-4	6	-4	1
1	+ 354,743 - 725,610 i	1	-2	0	2	-1
2	-2080, -1235, i	1	0	-2	0	1
3	+1572,15 - 6812,65 i	1	2	0	-2	-1
4	+4225, 0	1	4	6	4	1

Daraus ergeben sich folgende Koeffizienten von $h_1(w)$ [reelle Teile der Koeffizienten von $g(w)$]:

w^4	w^3	w^2	w	1
+ 120, - 354,74 -2080, -1572,15 +4225,	- 200, - 1451,22 0, +13625,30 0,	- 720, 0, - 4160, 0, -25350,	+ 200, - 1451,22 0, +13625,30 0,	+ 120, + 354,74 -2080, +1572,15 +4225,
+ 338,11	+11974,08	-30230,	+12374,08	+4191,89

und folgende Koeffizienten von $h_2(w)$ [imaginäre Teile der Koeffizienten von $g(w)$]:

w^4	w^3	w^2	w	1
+ 50, + 725,61 -1235, +6812,65 0,	+ 480, - 709,49 0, + 3144,30 -16900,	- 300, 0, -2470, 0, 0,	- 480, - 709,49 0, + 3144,30 +16900,	+ 50, - 725,61 -1235, -6812,65 0,
+6353,26	-13985,19	-2770,	+18854,81	-8723,26

Euklidischer Algorithmus:

$$\begin{array}{r}
 + 338,11 + 11974,08 - 30230, \quad + 12374,08 + 4191,89 (+0,05322) \\
 \pm 338,11 \mp 744,29 \mp 147,42 \pm 1003,45 \mp 464,25 \\
 \hline
 + 12718,37 - 30082,58 + 11370,63 + 4656,14 \\
 \hline
 + 6353,26 - 13985,19 - 2770, \quad + 18854,81 - 8723,26 (+0,499535) \\
 \pm 6353,26 \mp 15027,30 \pm 5680,03 \pm 2325,90 \\
 \hline
 + 1042,11 - 8450,03 + 16528,91 - 8723,26 (+0,081939) \\
 \pm 1042,11 \mp 2464,94 \pm 931,70 \pm 381,52 \\
 \hline
 - 5985,09 + 15597,21 - 9104,78 \\
 \hline
 \end{array}$$

Der größte gemeinsame Teiler lautet also:

$$5985,09 \cdot w^2 - 15597,21 \cdot w + 9104,78$$

und hat die Wurzeln

$$w_1 = 1,72322 \text{ und } w_2 = 0,88279$$

Daraus folgt nach der im Text angegebenen Formel (mit einer Genauigkeit von 3 Dezimalstellen):

$$x_1 = -4 + 7i \quad x_2 = 1 + 8i$$

Dividiert man $f(x)$ durch die Teiler $(x + 4 - 7i)$ und $(x - 1 - 8i)$, so erhält man die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2ix - 2 = 0,$$

deren Auflösung die restlichen Wurzeln:

$$x_3 = 1 - i \text{ und } x_4 = -1 - i$$

ergibt.

(Eingegangen am 2. Oktober 1959)

Buchbesprechungen

Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Von *K. Girkmann*. Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 318 Textabbildungen, XXXI, 632 Seiten. Wien: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen S 432.—, DM 72.—, sfr. 73.70, \$ 17.15, £ 6/2/6.

In den 13 Jahren seit dem Erscheinen der ersten Auflage sind die „Flächentragwerke“ zum unentbehrlichen Handbuch des Platten- und Schalenstatikers geworden. Die vorliegende fünfte Auflage konnte noch knapp vor dem Tode Prof. Girkmanns abgeschlossen werden. Sie führt noch einmal deutlich die wesentlichen Vorzüge der Girkmannschen Darstellungsweise vor Augen: Übersichtliche Ordnung und einheitliche Zusammenfassung des Materials, konsequente Beschränkung des mathematischen Apparates auf die Methode der Fourier-Entwicklung, Bereitstellung der Lösungen in einer Form, welche die sofortige zahlenmäßige Auswertung gestattet. Es waren ja gerade diese Vorzüge, die wesentlich mit zur großen Verbreitung des Buches beigetragen haben. Gewiß gibt es heute schon eine Reihe ausgezeichnete Darstellungen des Gebietes; keine kommt aber so sehr den Bedürfnissen des praktisch tätigen Ingenieurs entgegen, der sich nicht mit einigen allgemeinen Ansätzen zufriedengeben kann, sondern bis zum numerischen Resultat vordringen muß.

Die gegenüber der vierten Auflage vorgenommenen Erweiterungen bestehen aus einem an den Anfang des Buches gestellten ergänzenden Kommentar zur einschlägigen Literatur sowie aus einem Anhang, der eine ausführliche Darstellung der Reissnerschen Plattentheorie — auf orthotrope Platten verallgemeinert — enthält.

Das Buch wird noch auf viele Jahre hinaus das Standardwerk für den entwerfenden Ingenieur bleiben.

H. Parkus, Wien

Hochspannungstechnik. Von A. Roth. Vierte, vollständig neubearbeitete und vermehrte Auflage. Herausgegeben unter Mitwirkung von G. de Senarclens und J. Amsler. Mit 735 Abb. im Text sowie 95 Zahlentafeln, IX, 756 S. Wien: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen S 990.—, DM 163.—, sfr. 168.—, \$ 39.—, £ 14/-/-.

Die Hochspannungstechnik ist zu einer Disziplin größter Bedeutung und raschester Entwicklung geworden. Energieübertragung auf große Entfernungen, Atomphysik und eine Reihe weiterer Gebiete, wie Röntgen- oder Entstaubungsanlagen, erfordern hohe und höchste Spannungen. Entsprechend der Bedeutung der Hochspannungstechnik und der Breite ihrer Anwendung ist die Anzahl der laufend in Zeitschriften und anderer Literatur erscheinenden Untersuchungen und Berichte eine große, so daß schon bloßes Schritthalten einen erheblichen Zeit- und Arbeitsaufwand erfordert. Ein handlicher Band, der alles Wesentliche und ausführliche, weitere Quellen erschließende Literaturangaben enthält, stellt daher eine willkommene Hilfe dar.

Das vorliegende Buch erscheint nunmehr in der vierten Auflage, die gegenüber der dritten des Jahres 1950 weniger dem Umfange — 756 gegen 704 Seiten — als dem Inhalt nach beträchtliche, durch den Fortschritt bedingte Veränderungen aufweist. Das ununterbrochene rasche Anwachsen des zu berücksichtigenden Wissensstoffes hat ferner zur Folge, daß ein Einzelner das Gesamtgebiet der Hochspannungstechnik kaum mehr zu bewältigen vermag. So haben zu diesem Bande außer dem Autor und den bei der Herausgabe Mitwirkenden noch eine Reihe weiterer Fachleute und Firmen beigetragen, so daß der Inhalt, ein Zeichen der Zeit, bis zu einem gewissen Grade als Team-Arbeit angesprochen werden kann.

Das 1. Kapitel behandelt die allgemeinen Gesetze des elektrischen Feldes; es ist dies derjenige Teil des Buches, der Veränderungen naturgemäß am wenigsten unterliegt. Daß auf 42 Seiten keine erschöpfende, in die Tiefe gehende Darstellung gebracht werden kann, ist selbstverständlich; doch wird alles Erforderliche in einer sehr klaren Weise angegeben. Für die ausdrücklichen Angaben über die in die Formeln einzusetzenden Maßeinheiten wird jeder Nachschlagende Dank wissen.

Materialfragen, heute überhaupt ein Gebiet intensivster Forschung, spielen auch in der Hochspannungstechnik eine wesentliche, mitunter entscheidende Rolle. Die Kapitel II bis VI behandeln das Verhalten der festen, flüssigen und gasförmigen Stoffe im Hochspannungsfeld. Aus der Fülle der vorhandenen Isolierstoffe verschiedener Arten jeweils den geeignetsten zu wählen, bildet häufig ein keineswegs einfaches Problem. Eine Vollständigkeit anstrebende Aufzählung und Charakterisierung aller verfügbaren Materialien kann für ein Handbuch aus Raumangel nicht in Betracht kommen. Der vorliegende Band beschränkt sich auf kurze, das Wesentliche erfassende Angaben über die hauptsächlichsten in der Hochspannungstechnik verwendeten Isolierstoffe. Auf den Inhalt dieser 280 Seiten einzugehen, ist hier nicht möglich; es sei nur bemerkt, daß sie gedrängte, trotzdem inhaltsreiche Angaben über eine kaum mehr übersehbare Fülle von Materialien und ihr Verhalten bringen.

Kapitel VII ist den elektromagnetischen Schwingungs- und Stoßvorgängen gewidmet; ein Gebiet, auf welchem eine umfangreiche Theorie besteht. Der Umfang des Kapitels von 62 Seiten gestattet nur einen Auszug in Form eines Berichtes über die wichtigsten Vorgänge.

Kapitel X befaßt sich mit dem Lichtbogen in Luft und unter Öl. Die restlichen fünf Kapitel ziehen gewissermaßen die praktischen Schlußfolgerungen aus dem bisherigen für die Hochspannungsanlagen und Prüffelder. Das Literaturverzeichnis umfaßt 39 Seiten; ein Sachverzeichnis beschließt den Band.

Angesichts des Umstandes, daß in diesem Bande eine gewaltige Fülle des Wissens um Hochspannungsfragen enthalten ist, erübrigt es sich, auf diese oder jene der ungezählten Einzelheiten einzugehen. Zusammenfassend darf bemerkt werden, daß dieser Band den Charakter eines Standardwerkes auf dem Gebiete der Hochspannungstechnik besitzt, das allen an dieser Interessierten zuverlässige Angaben bietet, die durch das umfangreiche Literaturverzeichnis in wertvoller Weise ergänzt werden. Zur Befriedigung über das Vorliegen eines solchen Werkes und zum Dank an den Autor gesellt sich allerdings das Bedauern darüber, daß Bücher über in rasanter Entwicklung begriffene Disziplinen unausweichlich bald nicht mehr den letzten Stand der Dinge darstellen können.

Da, allgemein gesprochen, eine verhältnismäßig rasche Folge von Neuauflagen oft nicht möglich ist, könnte vielleicht an die Herausgabe von Ergänzungsbänden gedacht werden, wie es bei den vom gleichen Schicksal betroffenen großen Lexika meist der Fall ist.

L. Kneissler, Wien

Im Juni 1960 erscheint:

Bibliographie der gerbereichemischen und ledertechnischen Literatur

1700—1956. Von Prof. Ing. J. A. Sagoschen, Fachvorstand der Abteilung für Gerbereichemie und Ledertechnik an der Bundeslehr- und Versuchsanstalt für chemische Industrie und Gewerbe, Leiter der Versuchsanstalt für Lederindustrie, Wien. Unter Mitarbeit von Dr. P. Stadler, Max-Planck-Institut für Eiweiß- und Lederforschung, München (Vorstand: Prof. Dr. W. Graßmann). XIX, 1342 Seiten. Gr.-8°. 1960. (Handbuch der Gerbereichemie und Lederfabrikation. Herausgegeben von W. Graßmann. Redigiert von J. Trupke, Band IV.)

Ganzleinen S 4320.—, DM 720.—, sfr. 737.20, \$ 171.40

Vorbestellpreis, gültig bis 30. Juni 1960: Ganzleinen S 3840.—, DM 640.—, sfr. 655.30, \$ 152.35

Als Ergebnis einer mehr als dreißigjährigen Arbeit liegt nunmehr diese erst- und einmalige Bibliographie vor. Sie umfaßt unter Verarbeitung von mehreren tausend Buchpublikationen und Zeitschriftenjahrgängen das gesamte deutschsprachige Fachschrifttum der Originalarbeiten und die wichtigsten Referate über einschlägige fremdsprachige Arbeiten in deutschsprachigen Zeitschriften aus den Jahren 1700 bis 1956. Außerdem wurden auf Anregung des Herausgebers, Herrn Professor Dr. W. Graßmanns, die wichtigsten fremdsprachigen Arbeiten der Kriegs- und Nachkriegsjahre, deren Referierung in den deutschsprachigen Zeitschriften aus zeitbedingten Gründen nicht möglich gewesen war, aufgenommen. Diese Zitate wurden durch Herrn Dr. P. Stadler, Max-Planck-Institut für Eiweiß- und Lederforschung, München (Vorstand: Prof. Dr. W. Graßmann) bearbeitet.

Die Sammlung des Materials wurde im Jahre 1924 begonnen und, aufbauend auf der Bibliothek des deutschen Lederinstitutes in Freiberg/Sa. (Direktor: Prof. Dr. F. Stather) sowie jener der Versuchsanstalt für Lederindustrie in Wien in dreißigjähriger emsiger Arbeit bis zum Jahre 1955, mit dem sie in sich abgeschlossen wurde, fortgeführt. Die Jahre 1956 und 1957 wurden mit den wichtigsten Arbeiten nachgetragen.

Handbuch der mikrochemischen Methoden. Herausgegeben von F. Hecht, Wien, und M. K. Zacherl, Wien.

Vor kurzem erschien:

Band I, Teil 2: **Waagen und Geräte zur anorganischen Mikro-Gewichtsanalyse: Waagen und Wägung.** Von A. A. Benedetti-Pichler, New York. — **Geräte zur anorganischen Mikro-Gewichtsanalyse.** Von Friedrich Hecht, Wien. Mit 191 Textabbildungen. IV, 307 Seiten. Gr.-8°. 1959.

Ganzleinen S 480.—, DM 80.—, sfr. 81.90, \$ 19.05

Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuches Subskriptionspreis

Ganzleinen S 384.—, DM 64.—, sfr. 65.50, \$ 15.25

Waagen und Wägung

Die Einleitung gibt eine systematische Behandlung der Fehlerquellen, die bei Wägungen ganz allgemein beachtet werden müssen und die im Beobachter, in der Umgebung und in den verwendeten Taren und Gewichten ihren Ursprung haben. Das Kapitel Präzisionshebelwaagen wendet sich an die Benutzer gleicharmiger Hebelwaagen für hohe Belastung ebenso wie an die Benutzer von Analysenwaagen, Probierwaagen und mikrochemischen Waagen. Der Abschnitt über die meist aus Quarzglas hergestellten, hochempfindlichen Mikrowaagen (10^{-6} bis 10^{-10}) ist in drei Teile gegliedert, die das Arbeiten mit Quarzglas und den Bau von Waagen, Funktion und Konstruktionsprinzipien der verschiedenen Waageteile und die Wägungsprinzipien und entsprechenden Arten von Mikrowaagen kritisch behandeln.

Geräte zur anorganischen Mikro-Gewichtsanalyse

Der Beitrag von F. Hecht beschreibt die Geräte, die zur Ausführung mikrogravimetrischer Methoden gehören und in den letzten Jahrzehnten an verschiedenen Stellen angegeben worden sind, sowie ihre Anwendung für die Grundoperationen der mikrogravimetrischen Arbeitstechnik. Nicht miteingeschlossen sind die Geräte für die Mikroelektrolyse, da diese Verfahren an anderer Stelle des Handbuches behandelt werden sollen. Die einzelnen mikrogravimetrischen Bestimmungsverfahren für die verschiedenen Elemente und Ionen sind einem gesonderten Band vorbehalten.

Die Vermögensrechnung der staatlichen Eisenbahnen. Von Dkfm. Dr. Eduard Schaffer, Wien. 126 Seiten. 8°. 1958.

Steif geheftet S 90.—, DM 15.—, sfr. 15.40, \$ 3.55

Das Institut für Transportwirtschaft an der Hochschule für Welthandel in Wien hat die Aufgabe, vom betriebswirtschaftlichen Standpunkt die Fragen des modernen Verkehrswesens zu erforschen und legt die Arbeitsergebnisse in Einzelpublikationen der Öffentlichkeit vor. Im Zuge der Befrebungen um eine Verkehrskoordination ist die Frage der Vermögensrechnung der staatlichen Eisenbahnen von ausschlaggebender Bedeutung. Der Verfasser nimmt in realistischer Weise zum Problem der Abgrenzung des Bahnvermögens innerhalb des Vermögensverbandes des Staates Stellung und setzt sich mit dessen rechnungsmäßiger Darstellung im kameralen Rechnungssystem auseinander. In der Arbeit wird die Interdependenz von Erhaltung, Erneuerung und Erweiterung deutlich nachgewiesen. Durch die eingehende Behandlung der einzelnen Problemkreise wird eine Lücke in der transportwirtschaftlichen Literatur geschlossen.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. By **M. Z. v. Krzywoblocki**, Sc. D. (Lille), Ph. D. (Brooklyn), M. A. (Math., Stanford), M. S. (Appl. Math., Brown), M. Aer. En. (Brooklyn), Dipl.-Ing. (Lemberg), Professor, University of Illinois. With an Appendix by **Dr. Ph. Davis** and **Dr. Ph. Rabinowitz**, U. S. Department of Commerce, National Bureau of Standards. With 3 figures. X, 188 pages. 4°. 1960. Full cloth S 312.—, DM 52.—, sfr. 53.20, \$ 12.40

From the Preface

The reader who is somewhat acquainted with the field of compressible fluid flow hears much about *Stefan Bergman's* method of integral operators. It took many years for him to develop this method which is based primarily on the theory of analytic functions and particularly on the theory of functions of two complex variables. The method, as a whole, is scattered throughout many papers in mathematical journals, and as a matter of fact, in its present state, is accessible only to those who are fully acquainted with mathematical literature. In one of their papers, Professor *R. von Mises* and *M. Schiffer* greatly simplified the method in the subsonic case. The purpose of the present work is to represent the method in all its variations in such a way that a theoretical engineer or an applied aerodynamicist can use it in practical applications ... The first two parts of the work deal with the subsonic case. In these sections the author followed mostly the paper of *von Mises* and *Schiffer*. Part III contains the supersonic flow. Part IV the transonic flow and Part V the axially symmetric flow. These sections are based on *Bergman's* original papers and form a condensation of several of his papers on the subject. Part VI describes singularities which play so important a role in all hodograph transformations. Part VII contains a review of other methods available in the theory of compressible fluid flow. The subsequent parts contain: Part VIII, a review of tables in *Bergman's* method; Part IX, concluding remarks; Part X, a list of tables; Part XI, examples; and Part XII, errata in previous papers. Part XIII contains generalization to diabatic flow, Part XIV three-dimensional flow and Part XV by *P. Davis* and *P. Rabinowitz* from U. S. National Bureau contains some computations of subsonic fluid flows by *Bergman's* method integral operators carried out on the U. S. National Bureau of Standards Eastern Automatic Computer (SEAC), Washington, D. C.

Nationalökonomie. Grundlagen für eine exakte Theorie. Von Dipl.-Ing. **Franz Korenjak**, Wien. Mit 84 Textabbildungen. XXIV, 374 Seiten. Gr.-8°. 1960. Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, \$ 11.45

Die theoretische Nationalökonomie ist noch weit vom Status einer exakten Wissenschaft entfernt. Die vorliegende Arbeit hat sich die Aufgabe gestellt, ein Fundament für eine exakte Nationalökonomie zu errichten.

Die in früheren Zeiten verschiedentlich aufgestellte Behauptung, daß die Nationalökonomie nie eine exakte Wissenschaft werden könne, wird wohl kaum ernst genommen und es fehlt nicht an Versuchen, eine derartige Theorie von verschiedenen Seiten in Angriff zu nehmen: Die „Ökonometrie“ geht in analoger Richtung wie die exakten Naturwissenschaften vor, indem sie versucht, von den Erscheinungen induktiv auf die Gesetze des Wirtschaftens zu schließen (wie der Autor einleitend ausführt, kann dieser Methode nicht der gleiche Erfolg beschieden sein wie in den Naturwissenschaften, da in der Wirtschaft keine Versuche mit Variation von nur wenigen Größen angestellt werden können); rein mathematische Theorien stellen Axiomensysteme auf — eine Arbeit, die erst wertvoll wird, sobald man weiß, welche Axiomensysteme der theoretischen Nationalökonomie adäquat sind —; die Wiener Schule schließlich zeigte den Weg bzw. den Ausgangspunkt, wie der Autor im ersten Abschnitt darlegt.

Die unmittelbar evidenten Grundtatsachen des menschlichen Verhaltens werden als Grundlage der ganzen Theorie analysiert, und zwar wesentlich tiefer schürfend als von den Begründern und Nachfahren der Wiener und der Lausanner Schule. Davon ausgehend wird der Ablauf der Wirtschaft unter Verwendung einer möglichst einfachen Mathematik untersucht, wobei die unvermeidlichen idealisierenden Voraussetzungen in vieler Hinsicht weniger einschränkend sind als etwa bei der Lausanner Schule und ihren Nachfahren. Für eine Weiterentwicklung der Theorie unter schrittweiser Aufhebung dieser idealisierenden Voraussetzungen bildet eine Arbeit wie die vorliegende die unentbehrliche Grundlage, da nur so die begrifflichen Zusammenhänge erstmals geklärt und angemessene wirtschaftliche Begriffe exakt definiert werden können.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung